

EINFÜHRUNG IN DIE QUANTENFELDTHEORIE

WiSE 2024-2025 – PROF. MARC WAGNER

MARC WINSTEL: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 13

Zur Besprechung in den Tutorien am 11.02.24 und 13.02.25

Aufgabe 1 [Rotation im Isospinraum, Singlett und Triplet]

Die Rotation eines zweikomponentigen komplexen Spinors, der ein nichtrelativistisches Spin 1/2 Teilchen beschreibt, entspricht mathematisch einer Multiplikation mit einer SU(2)-Matrix

$$U = \exp(i\alpha_a \sigma_a / 2), \quad (1)$$

wobei $\hat{\alpha} = \vec{\alpha}/|\vec{\alpha}|$ die Rotationsachse ist und $|\vec{\alpha}|$ der Drehwinkel ist.

- (i) Zeige, dass für SU(2)-Matrizen U Folgendes gilt:

$$\sigma_2 U^\dagger \sigma_2 = U^T. \quad (2)$$

- (ii) Zeige unter Zuhilfenahme deines Ergebnis aus (i), dass sich $(\bar{d}, -\bar{u})$ unter der Isospin-Transformation (435) im Skript genauso verhält wie (u, d) .
- (iii) Zwei Spin 1/2 Teilchen können zu einem Singlett und einem Triplet kombiniert werden, wie z.B. aus Theo 4 bekannt. Gib die Singlett- und die drei Triplet-Kombinationen an. Folgere daraus und mit der in (ii) bewiesenen Aussage, dass

$$(\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2} \quad (3)$$

ein Isospin-Singlett ist und

$$\bar{u}d, (\bar{u}u - \bar{d}d)/\sqrt{2}, \bar{d}u \quad (4)$$

ein Isospin-Triplet bilden.

Aufgabe 2 [WW Theorie von Nukleonen und Pionen]

In Abschnitt 9.1.2 der Vorlesung wurde eine isospininvariante WW Theorie von Protonen, Neutronen und Pionen skizziert.

Zeige für den WW-Term (433), dass dieser

- (i) Lorentz-invariant,
(ii) paritätsinvariant,
(iii) isospininvariant

ist.

Hinweise: Die Beweise der Eigenschaften (i) und (ii) sind einfache Wiederholungsaufgaben, die sich mithilfe von Kapitel 3 im Skript leicht beantworten lassen (gehe für das Zeigen der Paritätsinvarianz davon aus, dass das Pion-Feld eine negative Parität aufweist). Bei Eigenschaft (iii) soll es in dieser Aufgabe ausreichen, Invarianz unter Isospinrotationen (429) mit $\alpha_a = \delta_{a,1}\alpha$, d.h. um die Isospin-x-Achse, zu zeigen. Zudem ist es hilfreich den Quark-Inhalt der Pionen, siehe Gleichung (436) im Skript, sowie den Kommutator $[\sigma_a/2, \sigma_b/2]$ zu verwenden bzw. in einer Nebenrechnung zuerst auszurechnen.

Das Zeigen der Isospininvarianz funktioniert mathematisch auch eleganter, z.B. durch Identifikation und Verwendung der adjungierten Darstellung der SU(2). Details zu gruppentheoretischen Grundlagen finden sich, bspw., in Arfken, Weber, „Mathematical Methods for Physicists“, oder im Appendix von Phillips, „Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik“.

Aufgabe 3 [Ablezen von Masse und Ladung der durch eine Lagrange-Funktion beschriebenen Teilchen]

Die folgende Theorie beschreibt drei Sorten von geladenen skalaren Teilchen,

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 (\partial_\mu \phi_i^*) (\partial^\mu \phi_i) - \mu^2 |\phi_1|^2 - \frac{\mu^2}{2} (|\phi_2|^2 + \phi_2^* \phi_3 + \phi_3^* \phi_2 + |\phi_3|^2) \quad (5)$$

mit 3 komplexen Skalarfeldern ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 .

- (i) Welche Massen haben diese Teilchensorten?

Hinweis: Finde eine geeignete Koordinatentransformation der Feldvariablen, d.h. eine Umdefinition der Felder, so dass Du die Antwort auf die gestellte Frage in offensichtlicher Weise ablesen kannst.

- (ii) Betrachte die Lagrange Dichte

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi) - V(|\phi|) \quad (6)$$

für ein komplexes Skalarfeld ϕ mit

$$V(|\phi|) = \lambda (|\phi|^2 - \phi_0^2)^2, \quad (7)$$

wobei $\lambda, \phi_0^2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$. Welche Teilchensorten werden mit dieser Theorie beschrieben und welche Eigenschaften (Masse, Ladung) haben sie? Unterscheide dabei die Fälle $\phi_0^2 > 0$, $\phi_0^2 = 0$ und $\phi_0^2 < 0$.