Einführung in die Quantenfeldtheorie

WiSe 2024-2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 12

Zur Besprechung in den Tutorien am 04.02.24 und 06.02.25

Aufgabe 1 [*Skalare QED*]

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit der skalaren Quantenelektrodynamik, d.h. mit der Wechselwirkung skalarer, geladener Teilchen mit Photonen.

Wir beginnen zunächst mit der Lagrange-Dichte eines freien, komplexen Skalarfeldes $\phi = (A + \mathrm{i}B)/\sqrt{2}$, $A, B \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = (\partial^\mu \phi)^* (\partial_\mu \phi) - m^2 |\phi|^2. \tag{1}$$

(i) Leite aus (1) durch Forderung von Invarianz unter lokalen U(1)-Transformationen (= Eichtransformationen) und anschließender minimaler Substitution die Lagrange-Dichte für skalare QED her. Folge dabei der Vorhergehensweise für das freie Dirac-Feld aus Kapitel 8.1 im Skript.

Auf Grundlage der erhaltenen Lagrange-Dichte wollen wir nun die Feynman-Regeln der skalaren QED im Impulsraum für S-Matrixelemente zusammentragen:

(1) Nutze dein Wissen aus den Kapiteln 6.5 und 8.2.3, um die mathematischen Ausdrücke für Propagatorlinien des Skalarfelds ϕ sowie des Eichfelds A^μ hinzuschreiben.

(2) Welche Vertices treten auf? Beachte dabei die modifizierte Struktur des kinetischen Terms des Skalarfelds, die zu zusätzlichen Wechselwirkungstermen führt.

Auf Grundlage der Feynman-Regeln wollen wir nun einzelne Streuprozesse diskutieren:

(ii) Betrachte die Streuung von Teilchen mit gleicher Ladung, $\phi^+ + \phi^+ \to \phi^+ + \phi^+$, sowie entgegengesetzter Ladung, $\phi^+ + \phi^- \to \phi^+ + \phi^-$, bis einschließlich Ordnung e^2 (ϕ^+ bezeichnet das positive geladene Teilchen, ϕ^- das zugehörige negativ geladene Antiteilchen). Zeichne die relevanten Feynman-Diagramme. Diskutiere den mathematischen Unterschied zwischen den Diagrammen der beiden Prozesse, der letztendlich zu Attraktion bzw. Repulsion führt.

(iii) Zeichne nun alle relevanten Diagramme für den Streuprozess $\phi^+ + \phi^+ \to \phi^+ + \phi^+$ in Ordnung e^4. Welche Diagramme treten in ähnlicher Form in QED (d.h. mit fermionischen Materieteilchen) auf, welche sind nur für skalare QED vorhanden?

Anmerkung: Bei den Feynman-Regeln und Diagrammen kommt es nicht auf kombinatorische und sonstige Vorfaktoren an, sondern lediglich auf die wesentlichen mathematischen Strukturen, die einzelnen Diagrammteilen (innere und äußere Linien, WW-Punkte) zugeordnet werden können.

Aufgabe 2 [*Elektron-Elektron-Streuung*]

In dieser Aufgabe geht es um die Berechnung des Wirkungsquerschnitts der Elektron-Elektron Streuung

$$e^- + e^- \to e^- + e^- \tag{2}$$

in Ordnung e^2, d.h. das finale Ergebnis dieser Aufgabe wurde im Vorlesungsskript bereits in Gleichung (422) angegeben. In dieser Aufgabe bezeichen q_1, q_2 die einlaufenden Vierer-Impulse und q_3, q_4 die auslaufenden Viererimpulse.

Im Folgenden arbeiten wir im Schwerpunktsystem, d.h. die Summe aller Dreierimpulse verschwindet zu jedem Zeitpunkt des Streuprozesses.

(i) Drücke die sogenannten Mandelstam-Variablen $s = (q_1 + q_2)^2$ sowie $t = (q_1 - q_3)^2$ durch die Energien der einzelnen Teilchen sowie den Streuwinkel θ (dieser bezeichnet die Ablenkung eines der beiden Teilchen durch den Streuprozess) im Schwerpunktsystem aus. Drücke anschließend die Beträge der räumlichen Impulse durch s sowie die Massen der beteiligten Teilchen aus (nimm der Einfachheit halber an, dass alle Teilchen diesselbe Masse besitzen).
Hinweis: Es ist im Schwerpunktsystem sinnvoll, den räumlichen Impulsbetrag eines einlaufenden Teilchens auf q und den räumlichen Impulsbetrag eines auslaufenden Teilchens auf q' zu setzen. Weitere Dreierimpulse lassen sich dann durch $\mathbf{q}$ und $\mathbf{q}'$ ausdrücken.

In Kapitel 8.3.2 wird der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ mit dem infinitesimalen Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$ für die Streuung in Ordnung e^2 angegeben. Für eine allgemeine Zweikörperstreuung $a + b \to c + d$ ist der differentielle Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2 s} \frac{q'}{q} |\mathcal{M}|^2, \tag{3}$$

wobei q und q' Impulsbeträge von ein- und auslaufenden Teilchen sind und $\mathcal{M}$ als

$$\langle \mathbf{q_3} s_3, \mathbf{q_4} s_4 | \mathrm{i}T | \mathbf{q_2} s_2, \mathbf{q_2} s_1 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) \mathrm{i}\mathcal{M} \tag{4}$$

definiert ist. Hierbei enthält das T-Matrixelement entsprechend Kapitel 7.2 die zur Streuung relevanten Beiträge. Dieses Matrixelement kann in einer Störungsreihe entwickelt werden, die kompakt durch Feynman-Diagramme notiert werden kann.
Kommentar: Gleichung (3) *wird in dieser Aufgabe als gegeben angenommen. Diese kann jedoch durch kinematische Überlegungen hergeleitet werden, siehe insbesondere Kapitel 5 von P. Schmüser, „Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker“.*

(ii) Übersetze die in Kapitel 8.3.2 gezeichneten Diagramme in mathematische Ausdrücke. Überlege dir, wie die beiden Feynman-Diagramme in Kapitel 8.3.2 korrekt in einer Störungsreihe für Gleichung (4) aufsummiert werden müssen (hierbei ist die Fermi-Statistik relevant). Schreibe die aus deinen Überlegungen resultierende Formel für $i\mathcal{M}$ hin. Diskutiere in diesem Zusammenhang, welche Werte der übertragene Viererimpuls k des Photons in dem jeweiligen Diagramm annehmen kann, indem du Viererimpulserhaltung an den Vertices beachtest.

Wie in Kapitel 8.3 besprochen, werden in Streuexperimenten häufig unpolarisierte Teilchen betrachtet, weshalb über alle einlaufende Spinindizes s_1, s_2 in $\mathcal{M}$ gemittelt und über alle auslaufenden Spinindizes s_3, s_4 summiert wird. Diese Spinmittelung wird im Folgenden durchgeführt und zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes (3) verwendet.

(iii) Stelle zunächst die Steuamplitude $|\mathcal{M}|^2$ auf und führe anschließend die Spinmittelung durch, d.h. berechne

$$\overline{|\mathcal{M}|}^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_1,s_2} \sum_{s_3,s_4} |\mathcal{M}|^2. \tag{5}$$

Durch die Summationen können Spuren über Spinindizes, die in $|\mathcal{M}|^2$ auftreten, identifiziert werden.

(iv) Verwende die Identitäten (diese zu beweisen ist eine gute Übung für den Umgang mit Gamma-Matrizen, aber hier nicht notwendig)

$$\gamma_\nu \not{q}_4 \gamma^\mu \not{q}_2 \gamma^\nu = -2\not{q}_2 \gamma^\mu \not{q}_4, \quad \gamma_\mu \not{q}_1 \not{q}_2 \gamma^\mu = 4(q_1^\nu q_{2,\nu})\mathbb{1}, \tag{6}$$

um den Ausdruck für $\overline{|\mathcal{M}|}^2$ zu vereinfachen. Hierbei bezeichnet $\mathbb{1}$ die 4×4 Einheitsmatrix und $\not{p} = \gamma^\nu p_\nu$ ist die abkürzende „Feynman Slash“-Notation.

(v) Betrachte den erhaltenen Ausdruck im relativistischen Limes, d.h. indem du annimmst, dass die Elektronenmassen vernachlässigbar klein gegenüber den Teilchenenergien sind. Nähere insbesondere die Ausdrücke $(q_1 - q_3)^2$ sowie $(q_1 - q_4)^2$ entsprechend und drücke sie durch s aus.

(vi) Ersetze in Gleichung (3) $|\mathcal{M}|^2 \to \overline{|\mathcal{M}|}^2$, um unpolarisierte ein- und auslaufende Elektronen zu betrachten. Dein Ergebnis sollte nach der Näherung in (v) und einigen Umformungen identisch zu Gleichung (422) im Skript sein.