# Einführung in die Quantenfeldtheorie

WiSe 2024-2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

# Aufgabenblatt 10

*Zur Besprechung in den Tutorien am 21.01.25 und 23.01.25.*

## Aufgabe 1 [*Feynman-Propagator des skalaren Felds.*]

Betrachte die inhomogene Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = j(x)\,, \tag{1}$$

welche ein skalares Feld $\phi(x)$ beschreibt, das mit einer externen Quelle $j(x)$ wechselwirkt ($j(x)$ kann z.B. ein anderes Feld beschreiben). Die Lösung dieser Gleichung lässt sich formal schreiben als

$$\phi(x) = \phi_0(x) - \int \mathrm{d}^4 y\, G(x-y) j(x)\,, \tag{2}$$

wobei $\phi_0(x)$ die homogene Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist und $G(x-y)$ eine Greensche Funktion, definiert durch

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G(x-y) = -\delta^{(4)}(x-y)\,. \tag{3}$$

(i) Stelle ausgehend von Gl. (3) eine Gleichung für $\tilde{G}(k)$, die Fourier-Transformierte von $G(x-y)$, auf und zeige, dass $\tilde{G}(k)$ durch

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2} \tag{4}$$

gegeben ist.

(ii) Der erhaltene Ausdruck

$$G(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{1}{k^2 - m^2} \tag{5}$$

hat Pole bei $k^2 = m^2$, d.h. bei $k^0 = \pm E(\boldsymbol{k})$. Um das Integral in Gl. (5) eindeutig zu machen, verschiebt man die Pole gemäß $k^0 = \pm E(\boldsymbol{k}) \to k^0 = \pm E(\boldsymbol{k}) \mp i\epsilon$ entlang der imaginären Achse, wobei $\epsilon$ eine infinitesimale positive Zahl ist. Zeige, dass dies zum Feynman-Propagator im Impulsraum führt, d.h.

$$\tilde{\Delta}_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}\,. \tag{6}$$

(iii) Betrachte nun den Feynman-Propagator im Ortsraum,

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}\,. \tag{7}$$

Verwende den Residuensatz, um das Integral über $k^0$ zu lösen und zeige, dass sich $\Delta_F(x-y)$ schreiben lässt als

$$\Delta_F(x-y) = -i \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2E(\boldsymbol{k})} (\theta(x^0-y^0)e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0-x^0)e^{+ik(x-y)}) \,, \tag{8}$$

wobei $\theta(x)$ die Heavyside-Funktion ist. Interpretiere das Ergebnis.

*Bemerkung:* In der Literatur werden $\Delta_F(x-y)$ und $\tilde{\Delta}_F(k)$ manchmal mit einem zusätzlichen Faktor $i$ definiert, d.h. $\tilde{\Delta}_F(k) = \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}$, womit das $-i$ vor dem Integral in Gl. (8) verschwindet.

(iv) Zeige, dass der Feynman-Propagator im Ortsraum gleich dem Erwartungswert des zeitgeordneten Produkt zweier komplexer skalarer Felder ist, also

$$\langle 0 | T\phi(x)\phi^\dagger(y) |0\rangle = i\Delta_F(x-y) \,, \tag{9}$$

mit

$$T\phi(x)\phi^\dagger(y) = \begin{cases} \phi(x)\phi^\dagger(y) & \text{für} \quad x^0 > y^0 \,, \\ \phi^\dagger(y)\phi(x) & \text{für} \quad x^0 < y^0 \,. \end{cases} \tag{10}$$

*Hinweis:* Füge auf der linken Seite von Gl. (9) explizit

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2E(\boldsymbol{k})} \left(a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + b^\dagger(\boldsymbol{k})e^{+ikx}\right) \tag{11}$$

ein. Verwende die bekannten Kommutatorrelationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, sowie ihre Eigenschaften beim Wirken auf Mehrteilchenzustände $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2 \ldots$.

*Bemerkung:* Im Falle reeller skalarer Felder erhält man $\langle 0 | T\phi(x)\phi(y) |0\rangle = i\Delta_F(x-y)$.

*Bemerkung:* Anstelle der Green's-Funktion Gl. (3) kann man den Feynman-Propagator auch als den Erwartungswert Gl. (9) definieren. Dann führt man die Schritte in dieser Aufgabe in umgekehrter Reihenfolge aus und erhält so die Interpretation des Feynman-Propagators als die Greensche-Funktion der Klein-Gordon-Gleichung.

## Aufgabe 2 [*Feynman-Propagator des Dirac-Felds.*]

Der Feynman-Propagator des Dirac-Feldes lautet

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= \langle 0 | T\psi(x)\bar{\psi}(y) |0\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \end{aligned} \tag{12}$$

mit

$$T\psi(x)\bar{\psi}(y) = \begin{cases} +\psi(x)\bar{\psi}(y) & \text{für} \quad x^0 > y^0 \,, \\ -\bar{\psi}(y)\psi(x) & \text{für} \quad x^0 < y^0 \,. \end{cases} \tag{13}$$

Zeige, dass der Integralausdruck in der zweiten Zeile von Gl. (12) aus der Definition in der ersten Zeile von Gl. (12) folgt. Führe dazu analoge Schritte wie in Aufgabe 1 oder im Vorlesungsskript aus. Hebe dabei die Unterschiede zum skalaren Feld hervor.