Einführung in die Quantenfeldtheorie
WiSe 2024-2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 9

Zur Besprechung in den Tutorien am 14.01.24 und 16.01.25

Aufgabe 1 [*Rechnungen zur Quantisierung des Maxwell-Feldes in Lorenz-Eichung*]

In dieser Aufgabe werden einige Identitäten explizit nachgerechnet, die im Kapitel 5.4.3 im Skript verwendet werden. Im Skript wird die Quantisierung des Eichfeldes A^μ der Elektrodynamik zunächst unter Verwendung der Lorenz-Eichung analog zur klassischen Theorie durchgeführt, d.h. die Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ wird verwendet. Im späteren Verlauf der Quantisierung treten durch dieses Vorgehen Probleme auf.

(i) Berechne die Kommutatorrelationen $[a_{\lambda_1}(\mathbf{k_1}), a^\dagger_{\lambda_2}(\mathbf{k_2})]$ ausgehend von der Definition der Feldoperatoren A^μ in Gl. (320) im Skript.

(ii) Zeige zudem, dass die Kommutatoren $[a_{\lambda_1}(\mathbf{k_1}), a_{\lambda_2}(\mathbf{k_2})]$ und $[a^\dagger_{\lambda_1}(\mathbf{k_1}), a^\dagger_{\lambda_2}(\mathbf{k_2})]$ verschwinden.

(iii) Drücke den Hamilton-Operator als Funktion der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus, d.h. zeige dass

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 E(\mathbf{k})} 2E(\mathbf{k}) \left(-a^\dagger_0(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) + \sum_{\lambda=1,2,3} a^\dagger_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) \right) + E_{\mathrm{Vakuum}}.$$

Mache dir mithilfe des Skripts klar, welche problematischen Konsequenzen die mathematische Struktur von H sowie die berechneten Kommutatorrelationen für die quantisierte Theorie haben.

Die Probleme verschwinden, wenn man die Eichbedingung auf Quantenebene berücksichtigt, d.h.

$$\langle \mathrm{phys} | \partial_\mu A^\mu | \mathrm{phys}' \rangle = 0$$

für die physikalischen Zustände $|\mathrm{phys}\rangle$ fordert, entsprechend den Seiten 59-61 im Skript. Es folgt die Bedingung $\partial_\mu A^{+,\mu} |\mathrm{phys}\rangle = 0$, die für

$$A^{+,\mu} = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 E(\mathbf{k})} E(\mathbf{k}) \sum_{\lambda=0,1,2,3} \epsilon^\mu(\lambda, \mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$$

gilt. Wir verwenden weiterhin die Definition

$$|\psi_{\mathrm{allg}}\rangle = \sum_{\lambda=0,1,2,3} c_\lambda a^\dagger_\lambda(\mathbf{k}) |0\rangle$$

für allgemeine 1-Photon Zustände.

Produced with the ExerciseHandler

(iv) Zeige, dass die Bedingung $\partial_\mu A^{+,\mu}|\psi_{\text{allg}}\rangle = 0$ äquivalent ist zu $c_0 + c_3 = 0$ (d.h. berechne Gl.(332) im Skript explizit).

(v) Verwende Definition (333) für $|\psi_t\rangle$ und $|\psi_{\text{phys}}\rangle$ aus dem Skript. Zeige

$$\langle\psi_{\text{phys}}|H|\psi_{\text{phys}}\rangle = \langle\psi_t|H|\psi_t\rangle.$$

Aufgabe 2 [*Fragen zu WW Quantenfelder mittels Störungstheorie*]

Nimm an, Du befindest Dich in einer mündlichen Prüfung zur QFT1 Vorlesung. Beantworte die folgenden Fragen in einigen wenigen aber inhaltlich wertvollen Sätzen. Verwende, wenn überhaupt, nur kurze Formeln oder Gleichungen. Beziehe Dich dabei auf ϕ^4-Theorie.

- Was ist die S-Matrix? Welche physikalisch messbaren Größen werden von ihr beschrieben? Unterscheide in deiner Ausführung klar zwischen der S-Matrix und (zeitabhängigen) Wahrscheinlichkeitsamplituden für Zustandsübergänge.
- Wie heißt die bekannte Formel, mit der Elemente der S-Matrix berechnet werden können? Welche Elemente der S-Matrix treten darin auf? Mit welchen eher abstrakten quantenfeldtheoretischen Objekten werden diese Elemente der S-Matrix in Beziehung gesetzt? Gib (ohne im Skript nachzusehen) grob die Struktur dieser Formel an.
- Wie unterscheidet sich das WW-Bild in der Quantenmechanik vom Schrödinger- und Heisenbergbild? Gib Formeln an, die einen Zustand $|\psi_S\rangle$ und Operator A_S im Schrödinger-Bild in das Heisenberg- und in das WW-Bild überführen.
  Kommentar: Das WW-Bild wird oft auch als Dirac-Bild bezeichnet. Recherchiere dazu gegebenenfalls in einem Standard-QM-Buch deiner Wahl.
- Gib die Gleichung an, die VEVs in der WW ϕ^4-Theorie mit VEVs in der freien Theorie in Verbindung setzt. Diskutiere die Unterschiede zwischen den darin auftretenden Feldoperatoren ϕ und ϕ_I. Gib eine Operatorgleichung an, die ϕ und ϕ_I in Verbindung setzt. Drücke außerdem die auftretende Größe H_I durch die Feldoperatoren ϕ_I aus.
- Skizziere mit einem "Einzeiler", wie das Vakuum der WW Theorie und der freien Theorie mit Hilfe des Hamilton-Operators der WW Theorie H in Verbindung gesetzt werden kann.

Aufgabe 3 [*Zeitentwicklung im WW-Bild*]

Betrachte den in der Vorlesung definierten Zeitentwicklungsoperator im WW-Bild

$$U(t,t_0) = T\left\{\exp\left(-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' H_I(t')\right)\right\},$$

wobei H_I den Hamilton-Operator im WW-Bild bezeichnet und T der Zeitordnungsoperator ist, der in Gl. (341) im Skript definiert wurde. Zeige, dass

Produced with the ExerciseHandler

(i) $U^\dagger(t_j, t_k) = U(t_k, t_j)$

(ii) $U(t_j, t_k)U(t_k, t_l) = U(t_j, t_l)$.

Produced with the ExerciseHandler