Einführung in die Quantenfeldtheorie

WiSe 2024-2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 8

Zur Besprechung in den Tutorien am 17.12.24 und 19.12.24

Aufgabe 1 [*Feldquantisierung in einer Box*]

Wir betrachten erneut die Feldquantisierung des reellen Skalarfeldes, diesmal jedoch nicht im unendlichen Volumen sondern in einem 1-dimensional Volumen der Länge L mit periodischen Randbedingungen. Gehe folgendermaßen vor:

(i) Für $L \to \infty$ kann die Fourier-Transformation als

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}k \tilde{f}(k) \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx},$$

definiert werden. Definiere die Fourier-Transformation nun entsprechend für endliches L und periodische Randbedingungen.
Hinweis: Überlege zuerst, welche Impulse k möglich sind, und parametrisiere diese durch die ganze Zahl n.

(ii) Definiere die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren orientiert am Skript und entsprechend deinen Überlegungen aus (i).

(iii) Führe eine kanonische Quantisierung analog zum Skript durch, indem du folgende Größen berechnest bzw. durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausdrückst oder geeignet definierst:

(a) Den Kommutator $\left[a(k_1), a^\dagger(k_2)\right]$.

(b) Den Hamilton-Operator H.

(c) Die Teilchenzahloperatoren $N(k)$.

(d) Die Eigenwerte des Hamilton-Operators. Nimm dabei an, dass $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von H für endliches L ist, d.h. es gilt

$$H|\psi\rangle = E_\psi|\psi\rangle, \quad N(k)|\psi\rangle = n_\psi(k)|\psi\rangle.$$

(e) $N(k)a^\dagger(p)|\psi\rangle$, $N(k)a(p)|\psi\rangle$.

(f) $N(k)|k_1, k_2, \ldots, k_j\rangle$, wobei $|k_1, k_2, \ldots, k_j\rangle = a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2)\ldots a^\dagger(k_j)|0\rangle$ mit einem entsprechend dem Skript definierten Vakuumszustand $|0\rangle$ ist.

Anmerkung: Diese Aufgabe dient als Vorbereitung für Aufgabe 2. Achte daher speziell auf die Bestimmung der Vakuumenergie als Funktion von L, da diese in Aufgabe 2 eine entscheidende Rolle spielt.

Aufgabe 2 [*Casimir-Effekt*]

Hendrik Casimir publizierte 1948 einen Artikel über den nach ihm benannten Effekt. Zwischen zwei parallelen, ungeladenen, leitenden Platten beobachtet man eine kleine, anziehende Kraft. Diese Kraft resultiert aus einer Änderung der Vakuumenergie zwischen den Platten. Obwohl die in der Vorlesung berechnete, unendliche Energie des Vakuums nicht messbar ist, realisierte Casimir dass eine Änderung der Vakuumenergie zwischen den Platten eine physikalisch beobachtbare Kraft als Konsequenz hat. Die Grundidee dabei ist, dass die Änderung der Vakuumenergie zwischen den Platten mit den erlaubten Moden zusammenhängt, deren Wellenlänge ein halbzahliges Vielfaches der Distanz zwischen den Platten sein muss (nur diese Moden sind kompatibel mit den Dirichlet-Randbedingungen, die für leitende Platten gelten).

Wir berechnen nun diese sogenannte *Casimir-Kraft*. Um die Berechnung zu vereinfachen betrachten wir das masselose, reelle Skalarfeld in einer 2-dimensionalen Raumzeit (1 Raumdimension und die Zeitdimension). Die Lagrange-Dichte ist somit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x,t))(\partial^\mu \phi(x,t))$$

und die zugehörige Bewegungsgleichung ist

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi(x,t) = 0.$$

(i) Berechne die Lösung der Bewegungsgleichung für Dirichlet-Randbedingungen $\phi(x=0) = \phi(x=D) = 0$, wobei eine der Platten bei $x=0$ und die andere bei $x=D$ positioniert ist (in einer Raumdimension ist eine Platte lediglich ein Punkt).

(ii) Wie lautet die Vakuumenergie in diesem Fall?
Hinweis: Orientiere dich an Aufgabe 1. Eine vollständige Quantisierung für die gegebenen Randbedingungen ist eine gute, freiwillige Übungsaufgabe, aber nicht zwingend erforderlich.

(iii) Berechne die Kraft zwischen den beiden Platten. Die folgenden Schritte sind dabei hilfreich:

(a) Führe einen Regulator λ ein, sodass jeder Energiebeitrag mit $\mathrm{e}^{-\lambda k_n}$ multipliziert wird, wobei k_n der Beitrag der n-ten Fouriermode zur Vakuumenergie ist. Am Ende von Aufgabe (c) kann dieser Regulator entfernt werden, indem man den Limes $\lambda \to 0$ verwendet. Diskutiere, warum z.B. ein Regulator $\mathrm{e}^{-\lambda}$ keinen Sinn machen und zu falschen Ergebnissen führen würde.

(b) Betrachte zwei festgehaltene, weit voneinander entfernte Platten im Abstand L sowie eine dritte bewegliche Platte, die sich nahe an einer der Randplatten befindet, im Abstand $D \ll L$. Berechne die gesamte Vakuumenergie $\tilde{E}(\lambda, D, L)$.

(c) Berechne die *Casimir-Kraft* als Ableitung der Vakuumenergie bezüglich des Abstands D, d.h. gemäß

$$F(D) = -\lim_{L\to\infty} \frac{\partial \tilde{E}(\lambda, D, L)}{\partial D}.$$

Hinweis: Es mag zweckmäßig sein, die Beiträge zur Vakuumenergie links und rechts der beweglichen Platte zunächst bis einschließlich Ordnung λ^2 *zu entwickeln. Dies erleichtert das Ausführen der Ableitung erheblich.*