Einführung in die Quantenfeldtheorie

WiSe 2024-2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 7

Zur Besprechung in den Tutorien am 10.12.24 und 12.12.24

Aufgabe 1 [*Lorentzinvariante Ausdrücke*]

In dieser Aufgabe werden Lorentzinvarianten behandelt, die in der Vorlesung besprochen werden.

(i) Überzeuge dich zunächst, dass

$$\mathrm{d}^4 k$$

lorentzinvariant ist.

(ii) Zeige, dass das in der Vorlesung verwendete Integrationsmaß

$$\frac{\mathrm{d}^3 k}{E(\mathbf{k})}$$

lorentzinvariant ist.

(iii) Verwende dein vorheriges Ergebnis, um die Lorentzinvarianz von

$$E(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

zu zeigen.

Aufgabe 2 [*Rechenübung zur kanonischen Quantisierung*]

Betrachte die kanonische Quantisierung des reellen Skalarfeldes ϕ unter Verwendung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$a(\mathbf{k}) = \int \mathrm{d}^3 x (E(\mathbf{k})\phi(\mathbf{x}) + \mathrm{i}\pi(\mathbf{x}))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{kx}},$$
$$a^\dagger(\mathbf{k}) = \int \mathrm{d}^3 x (E(\mathbf{k})\phi(\mathbf{x}) - \mathrm{i}\pi(\mathbf{x}))\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\mathbf{kx}}.$$

Leite die folgenden Identitäten her (diese wurden in der Vorlesung nicht gezeigt).

(i) $[a(\mathbf{k_1}), a(\mathbf{k_2})] = \left[a^\dagger(\mathbf{k_1}), a^\dagger(\mathbf{k_2})\right] = 0.$

(ii) Drücke die Hamilton-Funktion durch $a(\mathbf{k})$ und $a^\dagger(\mathbf{k})$ aus, d.h., zeige

$$H = \frac{\int \mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} E(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) (+E_{\text{vacuum}}).$$

(iii) Drücke den Impulsoperator durch durch $a(\mathbf{k})$ und $a^\dagger(\mathbf{k})$ aus, d.h., zeige

$$\mathbf{P} = \int \frac{\int \mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \mathbf{k} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}).$$

(iv) Zeige, dass die folgenden Identitäten gelten:

$$\left[H, a^\dagger(\mathbf{k})\right] = E(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}),$$
$$[H, a(\mathbf{k})] = -E(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}).$$

Aufgabe 3 [*Quantisierung bei leicht veränderter Definition von* $a(\mathbf{k})$]

Die in der Vorlesung verwendete Definition von $a(\mathbf{k})$ ist nicht zwingend in exakt dieser Form erforderlich. Sowohl bei dem $\phi(\mathbf{x})$- als auch beim $\pi(\mathbf{x})$-Term können andere Vorfaktoren verwendet werden, die sich dann durch die komplette Quantisierung ziehen. Verwende nun die folgende, allgemeinere Definition

$$a(\mathbf{k}) = \int \mathrm{d}^3 x (\alpha(\mathbf{k}) \phi(\mathbf{x}) + \mathrm{i}\beta(\mathbf{k}) \pi(\mathbf{x})) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

wobei α und β im Moment noch unspezifizierte, reelle Funktionen des Impulses $\mathbf{k}$ mit zu Gl. (204) aus dem Skript konsistenter Dimension sind.

(i) Drücke den Feldoperator ϕ durch a und $a^\dagger$ aus. Ist der erhaltene Ausdruck für den Feldoperator invariant unter Lorentztransformationen?

(ii) Drücke die Hamilton-Funktion durch a und $a^\dagger$ aus. Bestimme anschließend α und β so, dass

$$H = \frac{\int \mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} E(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) (+E_{\text{vacuum}}).$$

(iii) Konstruiere den Vielteilchenzustandsraum. Zeige, dass unabhängig von der Wahl von $\alpha(\mathbf{k})$ und $\beta(\mathbf{k})$ ein Erzeuger $a^\dagger(\mathbf{k})$ ein Teilchen mit Impuls $\mathbf{k}$ und Energie $E(\mathbf{k})$ erzeugt.