Einführung in die Quantenfeldtheorie

WiSe 2024-2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 6

Zur Besprechung in den Tutorien am 03.12.24 und 05.12.24

Aufgabe 1 [*Hamilton-Dichte der Elektrodynamik*]

Wir betrachten die Elektrodynamik im Vakuum mit der bekannten Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{1}$$

wobei $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ der Feldstärketensor ist. In den kommenden Vorlesung wird die Quantisierung des elektromagnetischen Potentials A^μ besprochen. Dazu ist es essentiell zuvor eine Eichfixierung vorzunehmen. Wir vollziehen hier erste Schritte mit der temporalen Eichung $A^0 = 0$ in der klassischen Feldtheorie.

(i) Stelle die Hamilton-Dichte $\mathcal{H}$ auf, indem du die kanonisch konjugierten Felder π^μ berechnest.

(ii) Drücke $\mathcal{H}$ durch die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus.

Aufgabe 2 [*Reelles Skalarfeld, Energie und Impuls*]

Wir betrachten ein reelles Skalarfeld mit Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi)$$

wobei $V(\phi)$ ein beliebiges Polynom in ϕ ist.

(i) Definiere die Transformation des Feldes $\phi(x)$ für Raumzeittranslationen $x^\mu \to x^\mu + s e^\mu$ unter Verwendung des Parameters s. Eine Zeittranslation entspricht dann z.B. dem 0-ten Einheitsvektor $e^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Erläutere mithilfe deines Wissens aus der klassischen Mechanik, welche Erhaltungsgrößen mit diesen Transformationen verbunden sind.

(ii) Wiederhole Kapitel 4.3.1 und 4.3.2 aus der Vorlesung und gib den allgemeinen Ausdruck für den Energie-Impuls Tensor $T^{\mu\nu}$ an.

(iii) Berechne den Energie-Impuls Tensor für das Skalarfeld $\phi(x)$ und die obige Lagrange-Dichte.

(iv) Berechne analog zur Vorlesung die Hamilton-Dichte aus der obigen Lagrange-Dichte und vergleiche mit deinem Ergebnis für den Energie-Impuls Tensor.

Optionale Zusatzaufgabe: Verwende das Resultat aus (iii) mit $V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2$ und die allgemeine Lösung der Klein-Gordon Gleichung, um

$$P^0 = H = \int T^{00} d^3x, \quad P^i = \int T^{0i} d^3x$$

zu berechnen, d.h., drücke P^μ im Endergebnis nicht durch die Felder ϕ und π sondern die in Gl.(52) des Skriptes vorkommenden Koeffizienten $a(\mathbf{k})$ und $b^*(\mathbf{k}) = a^*(\mathbf{k})$ aus. Welchen Größen entsprechen P^0 und P^i?
Hinweis: Es ist sinnvoll, die folgende Repräsentation der drei-dimensionalen Dirac δ-Funktion zu verwenden:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{p}') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}.$$

Aufgabe 3 [*Noether-Strom, Lorentztransformationen*]

Wir betrachten ein reelles Skalarfeld mit Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial^\mu \phi\right) - \frac{m^2}{2}\phi^2.$$

Betrachte als Transformation im Noether-Theorem infinitesimale Lorentztransformationen

$$\phi(s, x^\mu) = \phi((\eta^\mu{}_\nu + s\epsilon^\mu{}_\nu)x^\nu).$$

Leite mithilfe des Noether-Theorems die sechs zugehörigen erhaltenen Ströme $(j^\mu)^{\rho\sigma}$ sowie die zugehörigen Erhaltungsgrößen her. Für $\rho, \sigma = 1, 2, 3$, $\rho < \sigma$ kann eine bekannte Erhaltungsgröße aus der Mechanik unter Verwendung der Impulsdichte identifiziert werden. Diskutiere auch die Erhaltungsgrößen für $\rho = 0$ und $\sigma = 1, 2, 3$, indem du eine Zeitableitung auf die Erhaltungsgröße anwendest und null setzt.
Hinweis: Beachte, dass die Lagrange-Dichte nicht invariant unter Lorentztransformationen ist (dies gilt nur für die Wirkung). Unter Verwendung von Gl.(169) im Skript hängt der Noether-Strom noch von $\epsilon^\mu{}_\nu$ ab. Konstruiere durch geeignete Wahl von $\epsilon^\mu{}_\nu$ die sechs erhaltenen Ströme.