Einführung in die Quantenfeldtheorie

WiSe 2024-2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 5

Zur Besprechung in den Tutorien am 26.11 und 28.11.24

Aufgabe 1 [*Eichfreiheit und Maxwell-Gleichungen*]

Wir betrachten die kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{1}$$

mit dem dualen Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}$, dem elektromagnetischen Viererstrom $j^\nu = (\rho, \mathbf{j})$ sowie dem Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Dabei wird statt dem elektrischen Feld $\mathbf{E}$ und dem magnetischen Feld das Vektorpotential $A^\nu = (\phi, \mathbf{A})$ verwendet.

(i) Es gibt eine sogenannte Eichfreiheit des Vektorpotentials A^ν. Recherchiere diesen Begriff im Kontext des elektromagnetischen Viererpotentials und erläutere dessen Bedeutung kurz. Warum ist die Wahl von A^ν nicht eindeutig durch die Maxwell-Gleichungen bei Vorgabe von ρ und $\mathbf{j}$ festgelegt?

(ii) Gib die allgemeine Form einer Eichtransformation von A^ν an und zeige, dass diese die Maxwell-Gleichungen (1) invariant lässt

(iii) Verwende nun die sogenannte Coulomb-Eichung $\nabla \mathbf{A} = 0$. Welche bekannte Gleichung aus der Elektrostatik erhält man direkt unter Verwendung dieser Eichung? Unter welchen (Rand-) Bedingungen folgt in Coulomb-Eichung, dass $A^0 = \phi = 0$?

Betrachte im Folgenden die Maxwell-Gleichungen (1) in Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$.

(iv) Welche aus der Vorlesung bekannte Form nehmen die inhomogenen Maxwell-Gleichungen nun an ?
Hinweis: Man kann bei der Betrachtung zunächst j^ν vernachlässigen.

(v) Finde die allgemeine Lösung $A^\nu(t, \mathbf{x})$ der Maxwell-Gleichungen in Lorenz-Eichung im Vakuum. Betrachte dann speziell eine ebene Welle in z-Richtung und gib die drei möglichen Polarisationsrichtungen explizit an. Zeige, dass eine davon physikalisch bedeutungslos ist.

Aufgabe 2 [*Proca Gleichung*]

Betrachte die Maxwell Lagrangedichte mit Quellen

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu. \tag{2}$$

(i) Leite aus den Euler-Lagrange Gleichungen (siehe Kapitel 4.2) die inhomogenen Maxwell-Gleichungen her. Nutze dein Wissen aus dem Skript sowie Aufgabe 1, um zu erläutern warum die homogenen Maxwell-Gleichungen ebenfalls erfüllt sind.

Betrachte nun die sogenannte *Proca* Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \tag{3}$$

für massive Spin-1 Teilchen. Diese ist equivalent zu Gl. (2) mit $j^\mu = 0$ und einem zusätzlichen "Massenterm" für das Vektorpotential.

(ii) Zeige, dass (3) nicht mehr invariant unter Eichtransformationen ist.

(iii) Berechne mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichungen die zu (3) gehörigen Feldgleichungen.

(iv) Kontrahiere ∂_ν mit den in (iii) erhaltenen Feldgleichungen. An welche Eichfixierung erinnert dein Ergebnis? Wie vereinfacht diese Bedingung die Feldgleichungen?

Aufgabe 3 [*Variationsrechnung*]

Betrachte im Folgenden die Wirkung

$$S[\phi, \partial_\mu\phi] = \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{1}{2} \left(\partial^\mu \phi(x)\right)\left(\partial_\mu \phi(x)\right)) - \frac{m^2}{2} \left(\phi(x)\right)^2 \right)$$

mit Randbedingungen $\phi(\mathbf{r}, t_i) = \phi_i(\mathbf{r}), \phi(\mathbf{r}, t_f) = \phi_f(\mathbf{r})$ und $\phi(|\mathbf{r}| \to \infty, t) = 0$. Nach dem Hamilton'schen Prinzip wird S von der physikalisch realisierten Feldkonfiguration $\phi(x)$ minimiert, d.h. es gilt $\delta S = 0$ bei Variation dieser Feldkonfiguration um $\delta\phi(x) = 0$. Führe die Variationsrechnung zur Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung der obigen Feldtheorie durch:

(i) Drücke dazu δS zunächst durch S, $\frac{\delta S}{\delta \phi}$, $\frac{\delta S}{\delta \partial_\mu \phi}$ sowie die Feldvariationen $\delta\phi$ und $\delta\partial_\mu\phi$ aus.

Hinweis: δS ist durch eine Differenz der Wirkung nach der Variation und der Wirkung vor der Variation gegeben. Entwickle den erhaltenen Ausdruck in $\delta\phi$ und $\delta\partial_\mu\phi$.

(ii) Verwende, dass

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}, \quad \frac{\delta S}{\delta \partial_\mu \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \tag{4}$$

sowie $\delta\partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta\phi$.

(iii) Leite die Euler-Lagrange Gleichungen für ϕ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0.$$

aus der Forderung $\delta S = 0$ ab.

Hinweis: Verwende den gaußschen Integralsatz. Die RBs liefern zudem eine Bedingung an $\delta\phi(x)$ für $x \in$ Rand.

(iv) Sind die hergeleiteten Euler-Lagrange Gleichungen auch gültig, wenn S von zweiten oder höheren Ableitungen nach ϕ abhängt? Finde ein physikalisch relevantes Beispiel, bei dem eine solche Abhängigkeit vorliegt und gib das zu minimierende Funktional an.

Hinweis: Das zu findende Beispiel ist eine typische Aufgabe zur Übung der Variationsrechnung in der Mechanik.