Einführung in die Quantenfeldtheorie

WiSe 2024-2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 4

Zur Besprechung in den Tutorien am 19.11 und 21.11.24

Aufgabe 1 [*Lorentz-Transformation von Spinoren (1)*]

Zeige, dass die infinitesimalen Lorentz-Transformationen für Spinoren ((92) im Skript)

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{\mathrm{i}}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}, \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right]$$

ihre Bestimmungsgleichung ((91) im Skript)

$$\gamma^\nu = S\gamma^\mu S^{-1}\Lambda^\nu{}_\mu$$

erfüllen.

Aufgabe 2 [*Lorentz-Transformationen von Spinoren (2)*]

In der Vorlesung wurden infinitesimale Lorentz-Transformationen für Vierervektoren als

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \eta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu$$

mit $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$ angegeben.

(i) Begründe, dass jede infintesimale Lorentz-Transformation in dieser Form geschrieben werden kann.

Betrachte im Folgenden sechs elementare Lorentz-Transformationen, Rotationen um die kartesischen Achsen mit Drehwinkeln α_x, α_y und α_z sowie Boosts entlang der kartesischen Achsen mit Relativgeschwindigkeiten v_x, v_y und v_z.

(i) Drücke für jede dieser sechs Transformationen für infinitesimale Drehwinkel und Relativgeschwindigkeiten sowohl $\epsilon^\mu{}_\nu$ als auch $\epsilon^{\mu\nu}$ durch α_x, α_y, α_z, v_x, v_y und v_z aus.

(ii) Begründe oder zeige mathematisch, dass eine Rotation um den Winkel α äquivalent zu N hintereinander ausgeführten Rotationen um den Winkel α/N ist. Gilt dies auch für Boosts und Relativgeschwindigkeiten, d.h. ist ein Boost mit Relativgeschwindigkeit v äquivalent zu N hintereinander ausgeführten Boosts mit Relativgeschwindigkeit v/N? Durch welche eng mit der Geschwindigkeit verwandte Größe müssen Boosts ausgedrückt werden, damit die Hintereinanderausführung von Boosts ein ähnlich offensichtliches und einfaches Ergebnis liefert, wie das bei Rotationen der Fall ist?

Hinweis: Recherchiere gegebenenfalls "Relativistische Addition von Geschwindigkeiten" sowie "Rapidität" in Deinem bevorzugten Buch zur Mechanik.

Betrachte nun erneut die oben genannten sechs elementaren Lorentz-Transformationen, diesmal für endliche Drehwinkel und Relativgeschwindigkeiten. In der Vorlesung wurde angegeben, dass sich diese Transformationen in der Form

$$S(\Lambda) = \exp\bigg(- \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\bigg)$$

für Spinoren schreiben lassen. Drücke nun mit Deinem in dieser Aufgabe erarbeiteten Wissen sowohl $\epsilon^{\mu}{}_{\nu}$ als auch $\epsilon^{\mu\nu}$ durch α_x, α_y, α_z, ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z, v_x, v_y und v_z aus (hierbei bezeichnen ϕ_j Rapiditäten).

Aufgabe 3 [*Chiralität, γ_5 Matrix*]

Wir betrachten die in der Vorlesung definierte Matrix

$$\gamma^5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{1}$$

(a) Zeige, dass γ^5 hermitesch und selbstinvers ist.

(b) Zeige, dass γ^5 mit den Matrizen γ^ν anti-kommutiert, d.h. dass

$$\{\gamma^5, \gamma^\nu\} = 0 \tag{2}$$

gilt.

(c) Betrachte die Operatoren $P_{R/L} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma_5)$. Zeige zunächst, dass $P_{R/L}$ Projektionsmatrizen sind, indem du

$$P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0, \quad P_L + P_R = \mathbb{1} \tag{3}$$

verifizierst. Wende $P_{R/L}$ auf die Lösungen der Dirac-Gleichung ψ an. Verwende dabei einmal die Standarddarstellung und einmal die chirale Darstellung.

(d) Betrachte die Dirac-Gleichung in der chiralen Darstellung für $\psi = (\psi_L, \psi_R)^T$, wobei $\psi_{R/L}$ zweikomponentige Spinoren, auch Weyl-Spinoren genannt, sind. Setze für $\psi_{R/L}$ eine ebene Welle ein und analysiere die resultierende Gleichung für den ultra-relativistischen Fall $m = 0$. Zu welchem Operator h sind $\psi_{R/L}$ Eigenvektoren? Interpretiere dein Resultat im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie, wobei du von ultra-relativistischen Geschwindigkeiten $v = |\mathbf{v}| \approx c$ ausgehen kannst. Welche Unterschiede ergeben sich für ähnliche Betrachtungen für $m \neq 0$ im nicht- oder schwach-relativistischen Fall?

Hinweis: Es ist hilfreich, $p^0 = E = \sqrt{\mathbf{p^2} + m^2}$ zu verwenden.

Aufgabe 4 [*Chiralität in 2 Raumzeitdimensionen*]

Betrachte die Dirac-Gleichung in 2 Raumzeitdimensionen. Verwende die chirale Basis der γ-Matrizen, gegeben durch

$$\gamma^0 = \sigma_1, \gamma^1 = \mathrm{i}\sigma_2. \tag{4}$$

Die Lösung der Dirac-Gleichung $\psi = (\psi_L, \psi_R)^T$ besteht aus zwei Komponenten, d.h. $\psi_{R/L}$ beschreiben jeweils 1 Spinorkomponente.

(a) Gib die Matrix γ^{ch} an, welche das 2-dimensionale Analogon zur dem Operator γ^5 in 4 Raumzeitdimensionen darstellt. Beachte dabei, dass γ^{ch} selbstinvers und hermitesch sein soll.

(b) Analysiere die Dirac-Gleichung für $m = 0$. Gib eine Interpretation der Subskripte R/L der Spinorkomponenten an.