Einführung in die Quantenfeldtheorie

WiSe 2024-2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 3

Zur Besprechung in den Tutorien am 12.11 und 14.11.24

Aufgabe 1 [*Kontinuitätsgleichung für Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung*]

Wir haben bereits gezeigt, dass Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung eine Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ erfüllen.

(a) Berechne sowohl für eine Lösung mit positiver Energie als auch für eine Lösung mit negativer Energie die Dichte ρ und den Strom $\mathbf{j}$, wobei $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$.

(b) Diskutiere anhand Deiner Ergebnisse aus (a) eine mögliche Interpretation von ρ als Wahrscheinlichkeits- und als elektrische Ladungsdichte.

Aufgabe 2 [*Dirac-Gleichung und γ-Matrizen*]

(a) Verifiziere durch Verwendung der Standarddarstellung die wesentliche Eigenschaft der γ-Matrizen,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{1}$$

Es ist dabei zulässig und auch zweckmäßig, dein Wissen über die Eigenschaften der Pauli-Matrizen auszunutzen.

(b) Zeige, dass eine Lösung $\psi(x)$ der Dirac-Gleichung $(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ auch komponentenweise die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt, d.h. dass

$$(\Box + m^2)\psi(x) = 0 \tag{2}$$

gilt. Gehe dabei auf zwei verschiedenen Wegen vor:

(i) Setze die in der Vorlesung konstruierte allgemeine Lösung der Dirac-Gleichung in (2) ein.

(ii) Starte mit der Dirac-Gleichung und zeige ohne Kenntnis der allgemeinen Lösung der Dirac-Gleichung, dass jede Lösung der Dirac Gleichung auch die Klein-Gordon Gleichung erfüllt.

(c) Zeige, dass die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ für Lösungen der Dirac-Gleichung erfüllt ist. Berechne j^μ sowohl für Lösungen mit positiver Energie als auch für Lösungen mit negativer Energie. Diskutiere deine Ergebnisse und kontrastiere sie mit der Diskussion aus Aufgabe 1 (b).

(d) In der Vorlesung wurde die sogenannte „Standarddarstellung” für die γ-Matrizen angegeben. Es existieren weitere äquivalente Darstellungen, zum Beispiel die „chirale Darstellung” (auch „Weyl-Darstellung” genannt)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

wobei $\mathbb{I}_2$ die 2×2 Einheitsmatrix ist und σ^j die Pauli-Matrizen sind.

- Zeige, dass der Wechsel von einer zur anderen Darstellung über eine lineare Transformation der vier Spinkomponenten von ψ erfolgt. Konstruiere diese lineare Transformation.
- Die Standarddarstellung eignet sich für schwere beziehungsweise nichtrelativistische Teilchen, da zwei Spinkomponenten von ψ in diesem Fall nahezu verschwinden. Welche Eigenschaften müssen Teilchen besitzen, damit eine ähnliche Aussage in der chiralen Darstellung zutrifft?

Aufgabe 3 [*Dirac-Gleichung in 2 Raumzeitdimensionen*]

Betrachte die Dirac-Gleichung in einer Welt mit nur 2 Raumzeitdimensionen. Finde eine geeignete Darstellung der γ-Matrizen mit minimaler Matrixgröße. Ist die von Dir gefundene Darstellung eindeutig? Konstruiere die Lösungen der Dirac-Gleichung in 2 Raumzeitdimensionen. Diskutiere Unterschiede der physikalischen Eigenschaften der Lösungen in 2 und 4 Raumzeitdimensionen, insbesondere im Hinblick auf den Spin.