Einführung in die Quantenfeldtheorie

WiSe 2024-2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 2

Zur Besprechung in den Tutorien am 05.11 und 07.11.24

Aufgabe 1 [*Indexrechnung*]

(i) Leite
$$(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}$$
her, indem du die definierende Eigenschaft der Lorentzgruppe $\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}$ benutzt.

(ii) Zeige, dass der folgende Vektor kovariant ist, d.h. wie $\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\partial_{\nu}$ transformiert:
$$\partial_{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

(iii) Überprüfe, ob die folgenden Terme Lorentz-invariant sind:
a) $\partial_{\mu}x^{\mu}$ b) $\vec{x}^2$ c) $x^{\mu}x_{\mu}$ d) $x^{\mu}x^{\nu}$
Hinweis: Transformiere dazu die auftretenden Terme mithilfe einer Lorentztransformation in ein Bezugssystem Σ' und überprüfe, ob der Ausdruck die gleiche Form wie im Bezugssystem Σ hat.

(iv) In der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik existiert ein Lorentz-Tensor $F^{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ mit dem Viererpotential $A^{\mu} = \left(\phi, \vec{A}\right)$, welches das skalare, elektrostatische Potential ϕ sowie das Vektorpotential $\vec{A}$ in einer relativistischen Schreibweise vereint. Drücke $F^{\mu\nu}$ durch $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder aus, d.h. zeige
$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y c & -E_z/c \\ +E_x/c & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y/c & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z/c & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}.$$
Ein solches Objekt mit zwei Lorentz-Indizes nennt man einen Tensor zweiter Stufe. Die Indizes werden wie beim Vierervektor x^{μ} behandelt, z.B. gilt $F_{\mu}{}^{\nu} = \eta_{\mu\alpha}F^{\alpha\nu}$ und $F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}$

(a) Drücke $F_{\mu}{}^{\nu}, F_{\mu\nu}$ und $F^{\mu}{}_{\nu}$ durch $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder aus.

(b) Drücke $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ sowie $F_{\mu}{}^{\mu}$ durch $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder aus.

(v) Wende einen Boost in x-Richtung auf $F^{\mu\nu}$ an und gib die Felder im geboosteten Bezugssystem Σ' aus, d.h. gib $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$ als Funktion von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ an. Wie nimmt ein Beobachter im Inertialsystem Σ' ein elektromagnetisches Feld wahr, welches im Inertialsystem Σ ein reines $\vec{E}$-Feld ist, d.h. dort $\vec{B} = 0$ gilt (Σ und Σ' sollen dabei eine nicht verschwindende Relativgeschwindigkeit aufweisen)?

Aufgabe 2 [*Infinitesimale Lorentztransformation*]

Eine infinitesimale Lorentztransformation kann durch

$$x'^{\alpha} = \left(g^{\alpha\beta} + \epsilon^{\alpha\beta}\right) x_{\beta}, \quad x^{\alpha} = (g^{\alpha\beta} + \epsilon'^{\alpha\beta}) x'_{\beta}$$

ausgedrückt werden, wobei $\epsilon^{\alpha\beta}$ und $\epsilon'^{\alpha\beta}$ infinitesimale Parameter sind. Zeige, dass

$$\epsilon'^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\alpha\beta}.$$

Zeige desweiteren, dass

$$\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}.$$

Für die letztere Identität ist es hilfreich, $x'^{\mu} x'_{\mu} = x^{\mu} x_{\mu}$ zu verwenden.

Aufgabe 3 [*Kovariante, homogene Maxwell-Gleichung*]

Betrachte die kovariante Form der homogenen Maxwell-Gleichung

$$\partial_{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

wobei $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$ der duale Feldstärketensor genannt wird. Bestimme ausgehend von der kovarianten Form die sogannenten homogenen Maxwell-Gleichung ausgedrückt durch $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder.

Aufgabe 4 [*Relativistische Kontinuitätsgleichung*]

Leite für Lösungen $\phi(\vec{x}, t)$ der Klein-Gordon Gleichung eine Kontinuitätsgleichung der Form

$$\partial_t \rho + \nabla \vec{j} = \partial_{\mu} j^{\mu} = 0 \tag{1}$$

mit dem Viererstrom $j^{\mu} = \left(\rho, \vec{j}\right)$ her. Gib explizit j^{μ}, ρ und $\vec{j}$ an. Die Klein-Gordon Gleichung wird durch ebene Wellen gelöst. Berechne ρ für eine Ebene-Welle $\phi \sim \exp(\mathrm{i}px)$ und interpretiere dein Resultat.
Hinweis: Eine klug gewählte Linearkombination der Klein-Gordon Gleichung mit der komplex konjugierten Klein-Gordon Gleichung liefert die gewünschte Form einer Kontinuitätsgleichung.