

EINFÜHRUNG IN DIE QUANTENFELDTHEORIE

WiSE 2024-2025 – PROF. MARC WAGNER

MARC WINSTEL: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 1

Zur Besprechung in den Tutorien am 29.10 und 31.10.24

Aufgabe 1 [Natürliche Einheiten]

Wie viel sind 1kg sowie 1s in Einheiten von GeV wenn man $\hbar = c = 1$ setzt? Nutze dein Ergebnis um die Gravitationskonstante $G_N = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ und die Planck Masse $M_{\text{Pl}} = G_N^{-1/2}$ in natürliche Einheiten zu überführen, d.h. gib diese Konstanten in Einheiten von GeV an.

Aufgabe 2 [Mechanik in Polarkoordinaten]

Betrachte ein Partikel mit Masse m in zwei Raumdimensionen in Polarkoordinaten (r, φ) . Das Teilchen bewegt sich in einem Potential $V(r) = k/r$.

- Wie lautet die Lagrange-Funktion des Systems?
- Stelle die Euler-Lagrange-Gleichungen auf und verwende diese, um die Bewegungsgleichungen des Systems herzuleiten.
- Berechne die kanonisch konjugierten Impulse p_r und p_φ .
- Welche Erhaltungsgrößen gibt es im System? (Keine Rechnung notwendig.)

Aufgabe 3 [Erhaltung der Wahrscheinlichkeit]

Zeige, dass die Norm für Lösungen ψ der freien Schrödingergleichung erhalten ist, d.h. zeige dass

$$\frac{d}{dt} \int \psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) d^3x = 0$$

gilt.

Hinweis: Es gibt mehrere direkte Wege die Normerhaltung zu zeigen. Beispielsweise kann man entweder direkt die Schrödingergleichung benutzen oder die Kontinuitätsgleichung. Der Gaußsche Integralsatz ist hilfreich.

Aufgabe 4 [Messungen in der Quantenmechanik am Beispiel von Spins]

Der Spin eines Teilchens $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$ mit Gesamtspin $1/2$ wird im Rahmen der Quantenmechanik durch drei Operatoren beschrieben, die die Drehimpulsalgebra erfüllen,

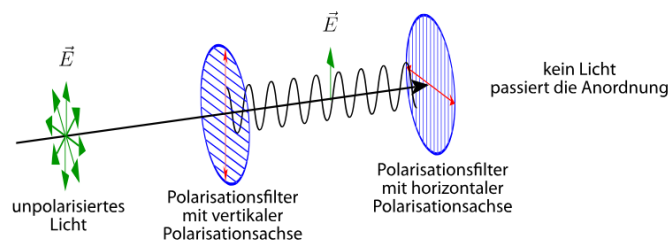
$$[\hat{s}_j, \hat{s}_k] = i\epsilon_{jkl} \hbar \hat{s}_l, \quad (1)$$

und durch 2×2 Matrizen dargestellt.

- Gib eine entsprechende Darstellung der drei Spinoperatoren an.
- Finde Eigenvektoren und Eigenwerte der drei Spinoperatoren.
- Ein System befindet sich in dem Eigenzustand von \hat{s}_x , dem der Eigenwert $+\hbar/2$ zugeordnet ist. Berechne den Erwartungswert einer Messung von s_y . Welche Messergebnisse treten auf? Gib die Wahrscheinlichkeit jedes möglichen Messergebnisses an.
- Das System ist in demselben Zustand präpariert wie zu Beginn von Teilaufgabe (c). Berechne den Erwartungswert einer Messung des Spins in Richtung $(+1, +1, 0)/\sqrt{2}$, d.h. entlang einer Achse, die im 45° -Winkel zur x -Achse steht. Welche Messergebnisse treten mit welchen Wahrscheinlichkeiten auf?
- Das System ist in demselben Zustand präpariert wie zu Beginn von Teilaufgabe (c). Zunächst wird eine Messung des Spins in Richtung $(+1, +1, 0)/\sqrt{2}$ durchgeführt. Berechne den Erwartungswert einer danach stattfindenden Messung von \hat{s}_y . Welche Messergebnisse treten mit welchen Wahrscheinlichkeiten auf?

Bonusaufgaben:

- Ideale, lineare Polarisationsfilter filtern unpolarisiertes Licht so, dass nur Wellen mit einer Polarisationsausrichtung passieren kann. Hinter einer Lichtquelle sind nun zwei Polarisationsfilter mit senkrecht zueinander stehender Polarisationsachse hintereinander angeordnet. Entsprechend der Abbildung passiert diese Anordnung kein Licht. Man schaltet nun einen weiteren Polarisationsfilter mit um 45° verdrehter Polarisationsachse zwischen die beiden senkrecht zueinanderstehenden Filter. Passiert nun Licht aus der Lichtquelle diese modifizierte Anordnung? Begründe deine Antwort anhand der vorangegangenen Rechnung.
- Für dasselbe System wie in (c) werden nun, anstelle einer einzigen Messung bei 45° -Winkel zur x -Achse, $N - 1$ Messungen durchgeführt, bei der die Messrichtung für jede Messung um $90^\circ/N$ erhöht wird. Die Messung beginnt bei 0° zur x -Achse und endet bei 90° , also parallel zur y -Achse. Überlege dir den Erwartungswert von \hat{s}_y im Limes $N \rightarrow \infty$, nachdem die $N - 1$ Messungen durchgeführt worden sind. (Keine Rechnung erforderlich.)



©

Quelle:

www.leifi.physik.de/optik/polarisation/grundwissenpolarisation-von-licht-fortfuehrung,
aufgerufen am 15.10.24 um 16:32