Einführung in die Quantenfeldtheorie

WiSe 2024-2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 0

Zur Besprechung in den Tutorien am 22.10 und 24.10.24

Aufgabe 1 [*Orts- und Impulsraumdarstellung*]

Orts- und Impulsoperator können für ein Teilchen in 1 Raumdimension z.B.

- gemäß $\hat{p} \equiv -i\hbar(d/dx)$, $\hat{x} = x$ (Ortsraumdarstellung) oder
- gemäß $\hat{p} = p$, $\hat{x} \equiv +i\hbar(d/dp)$ (Impulsraumdarstellung)

dargestellt werden.

(a) Formuliere die Eigenwertgleichung für den Hamilton-Operator mit beliebigem Potential $V(x)$ (d.h. die stationäre Schrödinger-Gleichung) einmal in Ortsraumdarstellung und einmal in Impulsraumdarstellung. Warum ist die Ortsraumdarstellung für die meisten Potentiale zweckmäßiger? Diskutiere mathematische Probleme in der Impulsraumdarstellung z.B. bei Verwendung eines Kastenpotentials.

(b) Gib die Lösungen der Eigenwertgleichungen (sowohl Eigenwerte als auch Eigenfunktionen) in beiden Darstellungen für das Potential $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ an. Ist hier die Eigenwertgleichung in Ortsraum- oder Impulsraumdarstellung zweckmäßiger?

(c) Bestimme durch explizite Rechnung die Eigenwerte und Eigenfunktionen in beiden Darstellungen für ein freies Teilchen.

Aufgabe 2 [*Bewegungsgleichung im Heisenbergbild*]

Sei $\hat{O}$ ein zeitunabhängiger Operator im Schrödingerbild und $\hat{H}$ der zeitunabhängige Hamiltonoperator des Systems. Operator können in das Heisenbergbild über die Definition

$$\hat{O}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}\hat{O}e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}$$

überführt werden. Leite die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für $\hat{O}_H(t)$ her, d.h. zeige dass

$$i\hbar\frac{d\hat{O}_H}{dt} = [\hat{O}_H, \hat{H}_H]\,.$$

Aufgabe 3 [*Kontinuitätsgleichung*]

Zeige dass die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho = \psi^*\psi$$

und der zugehörige Wahrscheinlichkeitsstrom

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}} \left[\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi\right]$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \vec{j} = 0$$

erfüllt. Die Wellenfunktion ψ erfüllt dabei die Schrödingergleichung

$$\left[-\frac{h^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{x})\right] \psi(\vec{x}, t) = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t).$$