

---

## Numerische Methoden der Physik – Aufgabenblatt 02

Marc Wagner – Christopher Czaban – Joshua Berlin  
Institut für Theoretische Physik – Goethe-Universität Frankfurt am Main

23. April 2014 (Besprechung am 30. April / 7. Mai 2014)

---

### Aufgabe 04

Ein System von Differentialgleichungen  $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t)$  soll für gegebene Anfangsbedingungen numerisch mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens gelöst werden, dem folgender Ansatz zu Grunde liegt:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t)\tau \\ \mathbf{k}_2 &= \left( w_1 \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) + w_2 \mathbf{f}(\mathbf{y}(t) + \beta \mathbf{k}_1, t + \alpha \tau) \right) \tau \\ \mathbf{y}(t + \tau) &= \mathbf{y}(t) + \mathbf{k}_2.\end{aligned}$$

$w_1, w_2, \alpha$  und  $\beta$  sind hierbei noch unbestimmte Parameter.

Welche Bedingungen müssen  $w_1, w_2, \alpha$  und  $\beta$  erfüllen, damit es sich um ein Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung handelt, d.h. in einem Zeitschritt  $\tau$  der Fehler  $\mathcal{O}(\tau^3)$  ist?

### Aufgabe 05

Betrachten Sie ein mathematisches Pendel (Masse  $m$ , Länge  $l$ ) unter Einfluss der Gravitation  $\mathbf{F}_g = -mge_z$ . Der Winkel  $\phi$  beschreibe die Auslenkung des Pendels aus seiner stabilen Gleichgewichtslage. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sei das Pendel in Ruhe bei  $\phi = \phi_0$ .

- Stellen Sie die Bewegungsgleichung für  $\phi$  auf.
- Berechnen Sie die Bahnkurve näherungsweise für kleine Auslenkungen  $\phi_0$  auf analytischem Weg.
- Implementieren Sie das in der Vorlesung besprochene Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung zur Lösung des oben beschriebenen Anfangswertproblems.
- Testen Sie Ihr Programm, indem Sie für kleine Winkel  $\phi_0$  Ihre numerischen Ergebnisse mit der analytischen Näherungslösung vergleichen.
- Berechnen Sie mit Ihrem Programm die Pendelbewegung  $\phi(t)$  für mindestens eine Periode für die Anfangsbedingungen  $\phi_0 = 0.25 \times \pi, 0.50 \times \pi, 0.75 \times \pi$ .
- Bestimmen Sie die Periodendauer des Pendels für  $\phi_0 = 0.50 \times \pi$ . Geben Sie eine Fehlerabschätzung für den von Ihnen ermittelten Wert an.