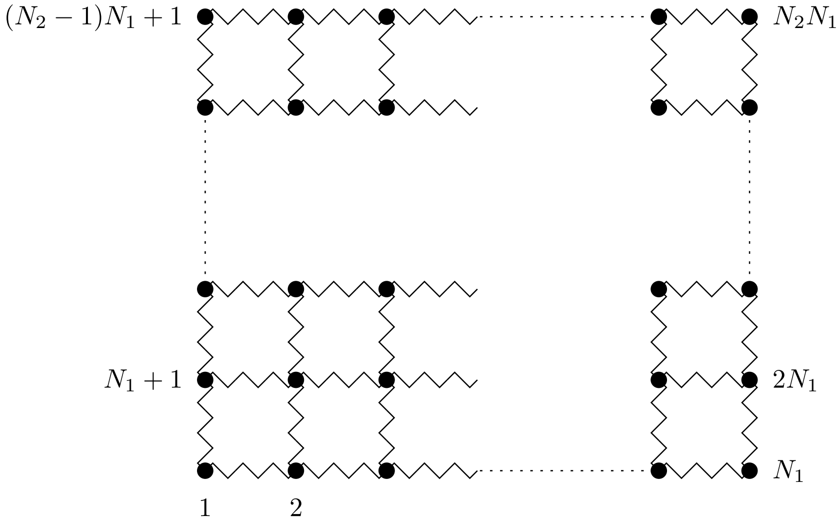
Numerische Methoden der Physik – Aufgabenblatt 08

Marc Wagner – Institut für Theoretische Physik – Goethe-Universität Frankfurt am Main

21. Dezember 2011 (Besprechung Aufgabe 13 (b) analytischer Teil am 18./19. Januar 2012, Rest am 25./26. Januar 2012)

Aufgabe 13

Ein System von $M = N_1 \times N_2$ identischen Massenpunkten (Masse m, Auslenkungen $x_1(t), \ldots, x_M(t)$) sei zweidimensional angeordnet. Nächste Nachbarn wechselwirken über identische Federn, die dem Hookschen Gesetz genügen (Federkonstante k). Die Massenpunkte seien gemäß der folgenden Abbildung durchnummeriert.



(a) Schreiben Sie ein Computerprogramm zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Normalschwingungen des Systems und zur Lösung des Anfangswertproblems

$$x_j(t=0) \quad = \quad \delta_{j,1} L \quad , \quad \dot{x}_j(t=0) \quad = \quad 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, M.$$

Verwenden Sie dabei

(1) eine ebene Anordnung (freie Randbedingungen), bei der die Massenpunkte an den Rändern (wie oben skizziert) Wechselwirkungen mit nur zwei beziehungsweise drei nächsten Nachbarn besitzen, und

(2) eine Anordnung auf einem Torus (periodische Randbedingungen), bei der die jeweiligen ersten und letzten Massenpunkte jeder "Zeile" beziehungsweise "Spalte" mit Federn verknüpft sind und somit alle Massenpunkte mit vier nächsten Nachbarn wechselwirken.

(b) Berechnen Sie analytisch zur Überprüfung Ihres Programms Eigenwerte und Eigenvektoren für periodische Randbedingungen. Verwenden Sie hierzu den Ansatz

$$x_j \quad \equiv \quad x_{j_1,j_2} \quad = \quad \exp\left(2\pi i\left(\frac{j_1 n_1}{N_1} + \frac{j_2 n_2}{N_2}\right)\right)e^{i\omega t}$$

wobei $j_1 = 0, \ldots, N_1 - 1$, $j_2 = 0, \ldots, N_2 - 1$, $j = N_1 j_2 + j_1 + 1$, sowie $n_1 = 0, \ldots, N_1 - 1$, $n_2 = 0, \ldots, N_2 - 1$. Vergleichen Sie die analytischen und numerischen Resultate für $N_1 = N_2 = 4$. Geben Sie die zugehörige Kraftmatrix an.

(c) Im Folgenden wird ein System von 7×7 Massenpunkten in der ebenen Anordnung betrachtet.

(1) Berechnen und zeichnen Sie die Bewegung $x_j(t)$ der Teilchen $j = 1, 7, 25, 49$ für $0 < t < 30\sqrt{m/k}$ mit den oben angegebenen Anfangsbedingungen.

(2) Lesen Sie aus Ihren numerischen Ergebnissen die typische Zeit ab, die eine Anregung benötigt, um sich von Teilchen 1 zu Teilchen 49 auszubreiten. Benutzen Sie dieses Resultat um den Wert der Federkonstante aus der Schallgeschwindigkeit $c_s \approx 5000\,\mathrm{m/s}$ dem Gitterabstand $a \approx 3 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$ und der Masse $m \approx 10^{-25}\,\mathrm{kg}$ eines Eisenatoms abzuschätzen.

(3) Berechnen Sie Spektrum und Anfangswertproblem, wenn die sieben Massenpunkte der mittleren Zeile ($j = 22, \ldots, 28$) Nächste-Nachbar-Wechselwirkungen besitzen, deren Federkonstanten um den Faktor 5 reduziert sind. Berechnen und zeichnen Sie wie in (a) die Bewegung der Teilchen $j = 1, 7, 25, 49$. Wie verändert sich dabei die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Anregung?

(4) Berechnen Sie Spektrum und Anfangswertproblem für die Teilchen $j = 1, 7, 25, 49$ und zeichnen Sie deren Bewegung, wenn der Massenpunkt in der Mitte des Gitters ($j = 25$) zusätzlich zu den Nächste-Nachbar-Wechselwirkungen (Federkonstante k) eine harmonische Kopplung ans Laborsystem (Federkonstante $5k$, das heißt Potential $V \to V + (5/2)k(x_{25})^2$) besitzt. Warum tritt keine verschwindende Eigenfrequenz mehr auf? Wie ändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Anregung?