Numerische Methoden der Physik – Aufgabenblatt 07

Marc Wagner – Institut für Theoretische Physik – Goethe-Universität Frankfurt am Main

14. Dezember 2011 (Besprechung Aufgabe 11 am 11./12. Januar 2012, Aufgabe 12 am 18./19. Januar 2012)

Aufgabe 11

Betrachten Sie (wie bereits in Aufgabe 05) ein mathematisches Pendel (Masse m, Länge l) unter Einfluss der Gravitation $\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{e}_z$. Der Winkel ϕ beschreibe die Auslenkung des Pendels aus seiner stabilen Gleichgewichtslage. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das Pendel in Ruhe bei $\phi = \pi/2$.

(a) Leiten Sie aus dem Energieerhaltungssatz einen Integralausdruck für die Zeitspanne τ her, die das Pendel von ϕ_1 nach ϕ_2 benötigt ($\phi_1 > \phi_2$, $|\phi_j| \leq \pi/2$).

(b) Berechnen Sie τ für $\phi_1 = \pi/4$ und $\phi_2 = 0$ numerisch auf zehn Nachkommastellen genau. Implementieren Sie dazu ein Integrationsverfahren Ihrer Wahl, z.B. die wiederholte Simpson-Regel.

(c) Für $\phi_1 = \pi/2$ und $\phi_2 = 0$ gilt $\tau = T/4$, wobei T die von Ihnen in Aufgabe 05 bereits grob bestimmte Periodendauer ist. Versuchen Sie $T/4$ analog zu Teilaufgabe (b) zu berechnen. Auf welche Probleme stoßen Sie und was ist deren Ursache?

(d) Schreiben Sie den in Teilaufgabe (a) aufgestellten Integralausdruck so um, dass er numerisch problemlos und effizient (= beschränkte Ableitungen!) zu berechnen ist. Bestimmen Sie damit $T/4$ auf zehn Nachkommastellen genau und verifizieren Sie Ihr Ergebnis durch Vergleich mit Ihrem Resultat von Aufgabe 05.
Hinweis: Versuchen Sie eine Koordinatentransformation zu finden, die den Integranden so verändert, dass er im gesamten Integrationsbereich etwa von gleicher Größenordnung ist.

Aufgabe 12

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Einheitskreises (Volumen der Einheitskugel in $d = 2$ Dimensionen), das Volumen der Einheitskugel in $d = 3$ Dimensionen und das Volumen der Einheitskugel in $d = 10$ Dimensionen numerisch mit Hilfe von Monte-Carlo-Integration. Werten Sie dazu die folgenden Integralausdrücke aus:

$$V^{(d)} = \int_{-1}^{+1} dx_1 \int_{-1}^{+1} dx_2 \ldots \int_{-1}^{+1} dx_d \, \Theta(1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_d^2) \quad , \quad d = 2, 3, 10.$$

Verwenden Sie zunächst 10^6, dann 10^8 zufällig gewählte Abtastpunkte. Vergleichen Sie mit analytisch bekannten Ergebnissen und diskutieren Sie die Größenordnungen der statistischen Fehler.