Numerische Methoden der Physik – Aufgabenblatt 06

Marc Wagner – Institut für Theoretische Physik – Goethe-Universität Frankfurt am Main

7. Dezember 2011 (Besprechung am 21./22. Dezember)

Aufgabe 10

Betrachten Sie erneut die in Aufgabe 09 beschriebene physikalische Situation eines geladenen Teilchens innerhalb einer geschlossenen geerdeten Fläche, und die zugehörige in Form eines linearen Gleichungssystems diskretisierte Poisson-Gleichung.

(a) Begründen Sie, dass die zum linearen Gleichungssystem gehörende Matrix dünn besetzt, symmetrisch sowie negativ definit ist.

(b) Implementieren Sie das in der Vorlesung besprochene iterative Verfahren der konjugierten Gradienten zur Lösung der diskretisierten Poisson-Gleichung. Testen Sie Ihr Programm, indem Sie mit Ihren korrekten (durch direkte Verfahren) gewonnenen Lösungen von Aufgabe 09 vergleichen.

(c) Betrachten Sie $d = 2$ Dimensionen, wobei sich die Ladung q im Zentrum einer kubischen geerdeten Box mit Kantenlänge $2R$ befindet. Berechnen Sie das zugehörige elektrostatische Potential für $n = 100$ und $n = 200$ (also mit grob 200×200 bzw. 400×400 Gitterpunkten; siehe Aufgabe 09 (c)). Fordern Sie dabei als Genauigkeit $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}| \leq 10^{-10}$.

(d) Wieviele Iterationen und welche Zeit benötigt Ihr Rechner zum Ermitteln der Lösung. Schätzen Sie ab, wieviel Speicher Ihr Rechner bei Verwendung direkter Verfahren bei gleicher Gitterpunktanzahl benötigen würde.

(e) Versuchen Sie in einem sportlichen Wettstreit mit Ihren Kollegen die Berechnung von ϕ mit möglichst großem n (also möglichst kontinuumsnah) durchzuführen, wobei die Genauigkeit wie in (c) zu wählen ist. Die jeweils "größten erfolgreichen Rechnungen" in den beiden Übungsgruppen werden bei der Besprechung dieses Zettels mit einem kleinen Preis ausgezeichnet (doppeltes Besuchen der Übungen ist in dieser Woche selbstverständlich unzulässig ;-)).