Numerische Methoden der Physik – Aufgabenblatt 03

Marc Wagner – Institut für Theoretische Physik – Goethe-Universität Frankfurt am Main

2. November 2011 (Besprechung (a) bis (d) am 16./17. November 2011, (e) bis (g) am 23./24. November 2011)

Aufgabe 06

Betrachten Sie ein Kepler-Problem, bei dem sich ein Massenpunkt der Masse m in einem Potential $V(\mathbf{r}) = -\alpha/|\mathbf{r}|$ bewege. Die Bahnkurve verlaufe nach geeigneter Koordinatenwahl in der x-y-Ebene und beschreibe eine Ellipse mit Exzentrizität ϵ und großer Halbachse a.

(a) Stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung auf. Um sie numerisch besser behandeln zu können (insbesondere um eine einzige numerische Rechnung auf offensichtliche Art und Weise direkt für beliebige Halbachsen a verwenden zu können), empfiehlt sich die ausschließliche Verwendung von dimensionslosen Größen. Schreiben Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung mit den in der Vorlesung illustrierten Techniken auf

$$\frac{d^2}{d\hat{t}^2}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\hat{\mathbf{r}}|^3}$$

um, indem Sie $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/a$ als dimensionslose Ortskoordinate einführen sowie eine geeignet gewählte dimensionslose Zeit $\hat{t}$ verwenden.

(b) Geben Sie Anfangsbedingungen $\hat{\mathbf{r}}(\hat{t} = 0)$ und $(d/d\hat{t})\hat{\mathbf{r}}(\hat{t} = 0)$ an, die der oben spezifizierten Bahnkurve entsprechen bzw. bei zeitlicher Entwicklung die oben spezifizierte Bahnkurve zur Folge haben.

(c) Verwenden Sie einen von Ihnen geschriebenen "4th Order Runge-Kutta-Solver", der uniforme Schritte in Zeitrichtung vollführt, um die Bahnkurve $\hat{\mathbf{r}}(\hat{t})$ für die von Ihnen in (b) angegebenen Anfangsbedingungen zu berechnen. Führen Sie mit Hilfe einer numerischen Rechnung einen Konsistenzcheck Ihrer Bemühungen und Ergebnisse aus (a), (b) und (c) durch.

(d) Weisen Sie numerisch die Gültigkeit des 2. Keplerschen Gesetzes nach.

(e) Bauen Sie in Ihren Runge-Kutta-Solver das in der Vorlesung besprochene Verfahren zur dynamischen Anpassung der Schrittweite ein (verwenden Sie als geschätzten Fehler $\delta = \max_j(|\hat{r}_{j,2\times\tau/2} - \hat{r}_{j,\tau}|)/(2^4 - 1)$). Testen Sie Ihr Programm, indem Sie die numerischen Rechnungen aus (c) wiederholen.

(f) Berechnen Sie Bahnkurven für $\epsilon = 0.1$ und $\epsilon = 0.9$ mit dynamischer Schrittweitenanpassung. Untersuchen Sie die Veränderung der Schrittweiten bei einem Ellipsenumlauf und beschreiben und interpretieren Sie Ihre Beobachtungen.

(g) Betrachten Sie erneut $\epsilon = 0.1$ und $\epsilon = 0.9$. Bestimmen Sie näherungsweise für Ihren Runge-Kutta-Solver mit uniformer Schrittweite, welche Schrittweite erforderlich ist, dass der Fehler δ bei keinem Schritt 10^{-3} übersteigt. Vergleichen Sie die Anzahl der für einen Ellipsenumlauf nötigen Schritte mit der, die Ihr Runge-Kutta-Solver mit dynamischer Schrittweitenanpassung bei gleicher Fehlerschranke benötigt. Führen Sie basierend auf Ihren Ergebnissen einen groben Effizienzvergleich zwischen uniformer und dynamischer Schrittweitenanpassung durch.