Numerische Methoden der Physik – Aufgabenblatt 02

Marc Wagner – Institut für Theoretische Physik – Goethe-Universität Frankfurt am Main

26. Oktober 2011 (Besprechung am 9./10. November 2011)

Aufgabe 04

Ein System von Differentialgleichungen $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t)$ soll für gegebene Anfangsbedingungen numerisch mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens gelöst werden, dem folgender Ansatz zu Grunde liegt:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t)\tau \\ \mathbf{k}_2 &= \Big(w_1 \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) + w_2 \mathbf{f}(\mathbf{y}(t) + \beta \mathbf{k}_1, t + \alpha\tau)\Big)\tau \\ \mathbf{y}(t+\tau) &= \mathbf{y}(t) + \mathbf{k}_2. \end{aligned}$$

w_1, w_2, α und β sind hierbei noch unbestimmte Parameter.

Welche Bedingungen müssen w_1, w_2, α und β erfüllen, damit es sich um ein Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung handelt, d.h. in einem Zeitschritt τ der Fehler $\mathcal{O}(\tau^3)$ ist?

Aufgabe 05

Betrachten Sie ein mathematisches Pendel (Masse m, Länge l) unter Einfluss der Gravitation $\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{e}_z$. Der Winkel ϕ beschreibe die Auslenkung des Pendels aus seiner stabilen Gleichgewichtslage. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das Pendel in Ruhe bei $\phi = \phi_0$.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für ϕ auf.

(b) Berechnen Sie die Bahnkurve näherungsweise für kleine Auslenkungen ϕ_0 auf analytischem Weg.

(c) Implementieren Sie das in der Vorlesung besprochene Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung zur Lösung des oben beschriebenen Anfangswertproblems.

(d) Testen Sie Ihr Programm, indem Sie für kleine Winkel ϕ_0 Ihre numerischen Ergebnisse mit der analytischen Näherungslösung vergleichen.

(e) Berechnen Sie mit Ihrem Programm die Pendelbewegung $\phi(t)$ für mindestens eine Periode für die Anfangsbedingungen $\phi_0 = 0.25 \times \pi$, $0.50 \times \pi$, $0.75 \times \pi$.

(f) Bestimmen Sie die Periodendauer des Pendels für $\phi_0 = 0.50 \times \pi$. Geben Sie eine Fehlerabschätzung für den von Ihnen ermittelten Wert an.