Numerische Methoden der Physik – Aufgabenblatt 01

Marc Wagner – Institut für Theoretische Physik – Goethe-Universität Frankfurt am Main

19. Oktober 2011 (Besprechung am 2./3. November 2011)

Aufgabe 01

Nehmen Sie an, Gleitkommazahlen werden in einem Computer lediglich mit Hilfe von 8 Bits gespeichert, wobei folgende Aufteilung vorliegt: Vorzeichen 1 Bit, Exponent 4 Bits, Mantisse 3 Bits (stets normiert).

(a) Wie lautet die Zahl mit dem kleinsten und wie die mit dem größten Betrag?

(b) Wie groß ist der typische relative Fehler, mit dem eine gespeicherte Zahl versehen ist?

(c) Welches Ergebnis liefert der Computer für die Differenzen

  (i) $35/32 - 33/32$,

  (ii) $37/32 - 35/32$?

  Geben Sie den jeweiligen relativen Fehler zum exakten Ergebnis an.

Aufgabe 02

(a) Schreiben Sie ein Computerprogramm, welches zu einer mit 0.0 initialisierten `float`-Variable (32 Bits) N-mal die Zahl 1.0 hinzuaddiert. Welches Ergebnis erhalten Sie für

  (i) $N = 10^7$,

  (ii) $N = 10^8$?

  Wiederholen Sie (i) und (ii) für eine mit 0.0 initialisierte `double`-Variable (64 Bits). Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

(b) Überlegen Sie sich ein Verfahren, mit dem die Addition von 10^8 `float`-Variablen der gleichen Größenordnung möglich ist, d.h. das Endergebnis lediglich mit einem geringen relativem Fehler behaftet ist. Implementieren und testen Sie dieses Verfahren für Aufgabe (a)(ii).

Aufgabe 03

(a) Zeigen Sie, dass $\phi_+ = (-1+\sqrt{5})/2$ und $\phi_- = (-1-\sqrt{5})/2$ die Gleichung

$$\phi^{n+1} \quad = \quad \phi^{n-1} - \phi^n$$

für beliebige n erfüllen.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe eines Computerprogramms ϕ_+^n und ϕ_-^n, $n = 2, 3, \ldots, 20$ auf zwei verschiedenen Wegen, wobei Sie (1. Weg) die oben angegebene Rekursionsformel verwenden und (2. Weg) entsprechend häufig $\phi_\pm$ multiplizieren. Verwenden Sie zunächst `float`-Gleitkommazahlen, in einem zweiten Versuch dann `double`-Gleitkommazahlen. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.