Numerische Methoden der Physik

SoSe 2021 – Prof. Marc Wagner

Lasse Müller: lmueller@itp.uni-frankfurt.de
Laurin Pannullo: pannullo@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 4

Wird besprochen am 11.05, 12.05[1] *und 18.05, 19.05*[2]

Aufgabe 1 [*Das Kepler Problem*] (2+3+10+5+6+4+4=34 Pkt.)

Wir betrachten das sogenannte Kepler-Problem, ein Spezialfall des Zwei-Körper-Problems: Zwei Körper interagieren über eine Zentralkraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, welche sich proportional zu $1/r^2$ ändert, wobei r der Abstand der Körper ist. Es kann gezeigt werden, dass dieses Problem äquivalent ist zu einem einzelnen Körper mit Masse m, welcher sich in einem attraktiven ($\alpha > 0$) Zentralpotential $V(\mathbf{r}) = -\alpha/r$ mit $r = |\mathbf{r}|$ bewegt. Unter der Vorraussetzung, dass die Gesamtenergie E negativ ist, können die Koordinaten so gewählt werden, dass die Trajektorie des Körpers die Form einer Ellipse mit Hauptachse a und Exzentrizität

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

hat, welche in der x, y-Ebene liegt.

Erster Teil

(i) Schreibe die Bewegungsgleichungen auf. Es ist zweckmäßig die Bewegungsgleichungen mit dimensionslosen Größen zu lösen. Dies hat nicht nur den Vorteil numerisch angenehmer zu sein, sondern erlaubt uns auch eine allgemeinere Lösung zu finden (Das Problem muss nicht für verschiedene Werte von a gelöst werden). Zeige, dass die Bewegungsgleichungen sich umschreiben lassen als

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\hat{t}^2}\,\hat{\mathbf{r}} = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{\hat{r}^3}\ ,$$

mit $\hat{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{r}/a$ und einer passenden Definition der dimensionslosen Zeit $\hat{t}$.

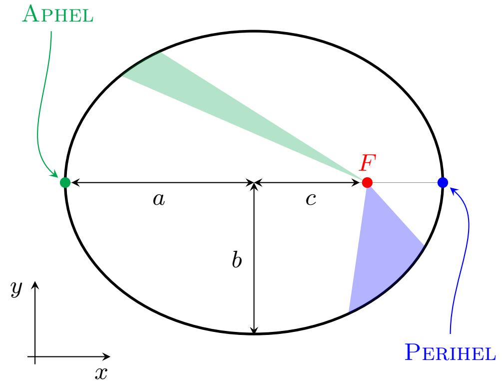
(ii) Wähle die Anfangsbedingungen

$$\hat{\mathbf{r}}_0 \equiv \hat{\mathbf{r}}\big|_{\hat{t}=0} \qquad \text{und} \qquad \hat{\mathbf{v}}_0 \equiv \left.\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\hat{t}}\right|_{\hat{t}=0}$$

so, dass $E < 0$ und der Körper sich am Perihel bei $\hat{t} = 0$ befindet und sich gegen den Uhrzeigersinn auf einer Ellipse mit Exzentrizität e und Hauptachse a bewegt, die entsprechend der Skizze orientiert ist.

(iii) Löse das Anfangswertproblem numerisch mit einem Runge-Kutta Algoritmus 4. Ordnung und konstanter Schrittweite. Plotte die so numerisch berechnete Trajektorie in der $(\hat{x}, \hat{y})$-Ebene, wobei $\hat{x} \equiv x/a$ und $\hat{y} \equiv y/a$. Füge deinem Plot die erwartete elliptische Bahn hinzu und überprüfe ob dein Zeitschritt klein genug ist, sodass die numerisch berechnete Trajektorie mit dieser Bahn übereinstimmt.

(iv) Überprüfe numerisch ob das 2. Kepler'sche Gesetz gilt.



[1] Der erste Teil von Aufgabe 1 wird an diesen Daten besprochen.
[2] Der zweite Teil von Aufgabe 1 und Aufgabe 2 werden an diesen Daten besprochen.

Produced with the ExerciseHandler

(v) Verbessere nun dein Programm, indem du die Möglichkeit einer adaptiven Schrittweite implementierst[3], welche in der Vorlesung besprochen wurde. Wiederhole task (iii) mit dieser Methode.

(vi) Benutze weiterhin eine adaptive Schrittweite um das Anfangswertproblem erneut zu lösen. Wähle dabei die Anfangsbedingungen so, dass die Trajektorie eine Ellipse mit Exzentrizität $e_1 = 0.1$ bzw. $e_2 = 0.9$ ist. Wie verändert sich die Schrittweite während der Integration der Gleichungen entlang der Trajektorie in beiden Fällen? Interpretiere deine Ergebnisse.

(vii) Plotte $\hat{y}$ als Function von $\hat{t}$. Finde eine Möglichkeit die Umlaufzeit des Körpers $\hat{T}$ innerhalb deines Programmes zu berechnen (Die Umlaufzeit vom Plot abzulesen ist nicht ausreichend). Bestimme die Umlaufzeit der Erde und des Mars indem du $\hat{T}$ zurück in physikalische Einheiten transformierst. Benutze hierfür notwendige physikalische Größen der Planeten aus dem Internet.

Aufgabe 2 [*Endlicher Potentialtopf*] (6 Pkt.)

Beim Bestimmen der Energieeigenwerte des endlichen Potentialtopfs im Rahmen der Quantenmechanik treten transzendente Gleichungen auf, die analytisch nicht gelöst werden können.

(i) Wiederhole die Grundlagen dieses Problems mit Hilfe eines Quantenmechanik-Buches deiner Wahl (z.B. F. Schwabl, "Quantenmechanik", Kapitel 3.4 oder W. Nolting, "Grundkurs Theoretische Physik 5/1", Kapitel, 4.2).

(ii) Die oben genannten transzendenten Gleichungen lauten

$$+q \tan q = \sqrt{\xi^2 - q^2} \quad \text{und} \quad -q \cot q = \sqrt{\xi^2 - q^2}\,,$$

wobei q die dimensionslose Wellenzahl und ξ eine den Potentialtopf charakterisierende dimensionslose Zahl ist. Dabei gilt die Bedingung $0 \leq q \leq \xi$. Bestimme sämtliche Lösungen q jeder der beiden Gleichungen für $\xi = 5$ grafisch grob, indem Du geeignete Plots anfertigst.

(iii) Bestimme sämtliche Lösungen q jeder der beiden Gleichungen für $\xi = 5$ auf mindestens vier Dezimalstellen genau. Verwende dafür das Newton-Raphson-Verfahren.

[3] Überlege dir eine Möglichkeit um elegant zwischen gleichmäßiger und adaptiver Schrittweite zu wechseln, hardcode es nicht.

Produced with the ExerciseHandler