Höhere Quantenmechanik

SoSe 2023 – Prof. Marc Wagner

Lasse Müller: lmueller@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 4

Abgabe bis 16.05.23, 12 Uhr. Besprechung in den Tutorien am 17.05 und 19.05.23.

Aufgabe 1 [*Green'sche Funktion der freien Schrödingergleichung*] (7+2+4+2=15 Pkt.)

Die freie Schrödingergleichung kann, wie in der Vorlesung diskutiert, in die Form

$$\left(\triangle + k^2\right)\psi(\mathbf{r}) = 0, \tag{1}$$

gebracht werden, wobei $k = |\mathbf{k}|$. Eine Green'sche Funktion des Differentialoperators auf der linken Seite der Gleichung ist gegeben durch ($r = |\mathbf{r}|$)

$$G_+(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}. \tag{2}$$

(a) Zeige, dass G_+ eine Green'sche Funktion von $\left(\triangle + k^2\right)$ ist, indem du nachweist, dass die definierende Gleichung

$$\left(\triangle + k^2\right) G_+(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \tag{3}$$

erfüllt ist. Diskutiere, ob es sich bei G_+ um eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung (3) handelt. *Hinweis: Es ist in der Berechnung notwendig, eine Fourier-Transformation durchzuführen. Für die anschließende Integration ist der Residuensatz hilfreich. Beachte dabei, dass du einen speziellen Integrationspfad in der komplexen Ebene wählen musst, auf dem sich keine Pole befinden.*

(b) Berechne die zu G_+ gehörige Wahrscheinlichkeitsstromdichte. Zeige so die Aussage aus der Vorlesung, dass G_+ eine auslaufende Kugelwelle beschreibt.

(c) Wähle einen anderen Integrationsweg in deiner Rechnung aus (a), sodass du eine weitere Green'sche Funktion G_- erhältst, die eine einlaufende Kugelwelle beschreibt. Zeige Letzteres, indem du erneut die zugehörige Wahrscheinlichkeitsstromdichte berechnest.

(d) In Kapitel 3.2.1 des Vorlesungsskriptes, wurde G_+ verwendet, um

$$\psi(\mathbf{r},t) \approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3k\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E(\mathbf{k})(t-t_0)/\hbar} a(\mathbf{k}) \left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\mathbf{kr}} + \frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kr}}{r} f_{\mathbf{k}}(\vartheta,\varphi)\right) \tag{4}$$

für große Abstände $r \gg R$ herzuleiten, wobei R eine Skala für die Reichweite des Potentials ist. Nach unserer Diskussion in (c) würde man erwarten, dass diesselbe Herleitung analog für G_- funktioniert. Studiere die Herleitung im Skript im Detail und gib an, an welcher Stelle die Verwendung von G_- die Rechnung deutlich schwieriger machen würde. Welche Probleme treten dort bei der Verwendung von G_- auf?

Aufgabe 2 [*Wahrscheinlichkeitsdichte und Kontinuitätsgleichung I*](2+2+1=5 Pkt.)

(a) Zeige, dass für eine Lösung $\psi(\mathbf{r},t)$ der Schrödinger-Gleichung eine Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r},t)(\psi(\mathbf{r},t))^*$ gilt. Leite im Rahmen Deines Beweises die zugehörige Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ her.

(b) Zeige, ausgehend von der in (a) gefundenen Kontinuitätsgleichung, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit zeitlich erhalten ist.

(c) Zeige, dass für eine Lösung $\psi(\mathbf{r})$ der stationären Schrödinger-Gleichung und beliebiges Volumen V

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{A}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad = \quad 0$$

gilt ($\oint_{\partial V} d\mathbf{A}$ bezeichnet die Integration über die das Volumen V begrenzende geschlossene Fläche).