Höhere Quantenmechanik

SoSe 2023 – Prof. Marc Wagner

Lasse Müller: lmueller@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1 [*Streuung in einer Raumdimension am Potentialtopf*] (5+5+4+3 Pkt.)

Betrachte die in der Vorlesung diskutierte Streuung in einer Raumdimension am Potentialtopf

$$V(x) \quad = \quad \begin{cases} -V_0 & \text{für } -a \leq x \leq +a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

(a) Führe die in der Vorlesung ausgelassene Rechnung zur Bestimmung der Lösungen der stationären Schrödinger-Gleichung mit $E > 0$ (d.h. Streuzustände) im Detail aus. Zeige damit insbesondere, dass

$$B_1 \quad = \quad A_1 S(E) \frac{i}{2} \left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sin(2qa) \quad , \quad A_3 \quad = \quad A_1 S(E)$$

mit

$$S(E) \quad = \quad \frac{e^{-2ika}}{\cos(2qa) - (i/2)((q/k) + (k/q)) \sin(2qa)}$$

(Notation und Benennung der Größen wie in der Vorlesung).

(b) Führe die Entwicklung von $S(E)$ in der Umgebung von Resonanzen E_R in der kleinen Größe $E - E_R$ aus und zeige damit, dass für einen sehr tiefen Potentialtopf ($V_0 \gg E_R$) gilt:

$$S(E) \quad \approx \quad (-1)^n e^{-2ika} \frac{i\Gamma/2}{E - E_R + i\Gamma/2}. \tag{1}$$

Beachte, dass gilt: $2qa\Big|_{E=E_R} = n\pi$.

(c) Leite aus den Ergebnissen der Vorlesung bzw. Deinen Ergebnissen aus Teilaufgabe (a) die Wellenfunktionen der gebundene Zustände her, indem Du Energien $-V_0 < E < 0$ betrachtest und somit $k = i(2m|E|)^{1/2}/\hbar$ als rein imaginäre Größe verwendest. Beachte dabei, dass gebundene Zustände eine normierbare Wellenfunktion besitzen müssen. Welches evtl. unerwartete Verhalten weist $S(E)$ auf und wie lässt sich dieses anschaulich begründen?

(d) Diskutiere Existenz und Lage der Pole von $S(E)$, wobei Du auch komplexe Werte für E zulässt. Skizziere die Pole in der komplexen E-Ebene. Überlege dabei insbesondere, welche Probleme der Faktor e^{-2ika} bereitet. Unterscheide in Deiner Diskussion Energien im Bereich der gebundenen Zustände ($\text{Re}(E) < 0$) und im Bereich der Streuzustände ($\text{Re}(E) > 0$).

Aufgabe 2 [*Einlaufendes Teilchen als Wellenpaket*] `(3 Pkt.)`

In Kapitel 3.2.1 der Vorlesung wird die Wellenfunktion eines einlaufenden Teilchens in einem Streuexperiment durch ein Wellenpaket

$$\psi(\mathbf{r}, t_0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^3k a(\mathbf{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}} \tag{2}$$

beschrieben. Konstruiere eine entsprechende Wellenfunktion durch Spezifikation einer geeigneten Funktion $a(\mathbf{k})$, welche die in Kapitel 3.2.1 der Vorlesung beschriebenen Eigenschaften erfüllt. Diese sind im Speziellen:

(1) Das Teilchen sollte eine Impulsverteilung haben, die bei $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ einen klar definierten Peak hat und deren Breite klein gegenüber $|\mathbf{k}_0|$ ist.

(2) Bei $t = t_0$ sollte sich das Teilchen weit von dem um den Ursprung zentrierten Potential V befinden.

(3) Zu einem späteren Zeitpunkt $t > t_0$ sollte das Teilchen auf das Potential treffen.