

Blatt 8

vom 08.06.2017, Abgabe am 15.06.2017 in der Vorlesung

16) Kontinuitätsgleichung für Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung (2+1=3 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung eine Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ erfüllen.

- Berechne sowohl für eine Lösung mit positiver Energie als auch für eine Lösung mit negativer Energie die Dichte ρ und den Strom \mathbf{j} , wobei $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$.
- Diskutiere anhand Deiner Ergebnisse aus (a) eine mögliche Interpretation von ρ als Wahrscheinlichkeits- und als elektrische Ladungsdichte.

17) γ -Matrizen und Dirac-Gleichung (3+2+3+5=13 Punkte)

- Verifiziere durch explizites Ausrechnen die wesentliche Eigenschaft der γ -Matrizen,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}.$$

Verwende dabei zweckmäßiger Weise Dein Wissen über Pauli-Matrizen und deren Eigenschaften bei Multiplikation.

- Zeige, dass eine Lösung $\psi(x)$ der Dirac-Gleichung (d.h. $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$) auch komponentenweise die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt, d.h. dass

$$\left(\square + m^2\right)\psi(x) = 0$$

gilt.

- Zeige, dass die in der Vorlesung angegebene Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ für Lösungen der Dirac-Gleichung gilt. Berechne j^μ sowohl für Lösungen mit positiver Energie als auch für Lösungen mit negativer Energie.
- In der Vorlesung wurde die sogenannte „Standarddarstellung“ für die γ -Matrizen angegeben. Es existieren neben der Standarddarstellung weitere äquivalente Darstellungen, z.B. die „chirale Darstellung“ (oder auch „Weyl-Darstellung“).
 - Schlage die chirale Darstellung in der Literatur nach und gib sie an.
 - Zeige, dass der Wechsel von einer zur anderen Darstellung über eine lineare Transformation der vier Spinkomponenten von ψ erfolgt. Konstruiere diese lineare Transformation.
 - Die Standard-Darstellung eignet sich für schwere beziehungsweise nicht-relativistische Teilchen, da zwei Spinkomponenten von ψ in diesem Fall nahezu verschwinden. Welche Eigenschaften müssen Teilchen besitzen, damit eine ähnliche Aussage in der chiralen Darstellung zutrifft?

18) Dirac-Gleichung in 2 Raumzeitdimensionen (4 Punkte)

Betrachte die Dirac-Gleichung in einer Welt mit nur 2 Raumzeitdimensionen. Finde eine geeignete Darstellung der γ -Matrizen mit minimaler Matrixgröße. Ist die von Dir gefundene Darstellung eindeutig? Finde die Lösungen der Dirac-Gleichung in 2 Raumzeitdimensionen. Diskutiere Unterschiede der physikalischen Eigenschaften der Lösungen in 2 und 4 Raumzeitdimensionen, insbesondere im Hinblick auf den Spin.