Das Noether-Theorem in der Mechanik

Gegeben:

- Lagrange-Funktion $L(\xi^i, \dot{\xi}^i)$.
- Transformation der Koordinaten: $\xi^i(t) \to \xi^i(s,t)$ mit $\xi^i(0,t) = \xi^i(t)$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} L(\xi^i(s,t), \dot{\xi}^i(s,t)) &= \frac{\partial L(\xi^i(s,t), \dot{\xi}^i(s,t))}{\partial \xi^k(s,t)} \frac{\partial \xi^k(s,t)}{\partial s} + \frac{\partial L(\xi^i(s,t), \dot{\xi}^i(s,t))}{\partial \dot{\xi}^k(s,t)} \frac{\partial \dot{\xi}^k(s,t)}{\partial s} = \\
&= \underbrace{\frac{\partial L(\xi^i(s,t), \dot{\xi}^i(s,t))}{\partial \xi^k(s,t)} \frac{\partial \xi^k(s,t)}{\partial s} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\xi^i(s,t), \dot{\xi}^i(s,t))}{\partial \dot{\xi}^k(s,t)} \right) \frac{\partial \xi^k(s,t)}{\partial s}}_{=0 \text{ (Euler-Lagrange-Gleichungen)}} + \\
&\quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\xi^i(s,t), \dot{\xi}^i(s,t))}{\partial \dot{\xi}^k(s,t)} \frac{\partial \xi^k(s,t)}{\partial s} \right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial s} L(\xi^i(s,t), \dot{\xi}^i(s,t)) \bigg|_{s=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\xi^i(t), \dot{\xi}^i(t))}{\partial \dot{\xi}^k(t)} \frac{\partial \xi^k(s,t)}{\partial s} \bigg|_{s=0} \right). \qquad (2)$$

Ist die Transformation eine Symmetrietransformation, das heißt

$$L(\xi^i(s,t), \dot{\xi}^i(s,t)) = L(\xi^i(t), \dot{\xi}^i(t)) \qquad (3)$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial}{\partial s} L(\xi^i(s,t), \dot{\xi}^i(s,t)) = 0, \qquad (4)$$

folgt eine Erhaltungsgröße:

$$I = \frac{\partial L(\xi^i(t), \dot{\xi}^i(t))}{\partial \dot{\xi}^k(t)} \frac{\partial \xi^k(s,t)}{\partial s} \bigg|_{s=0} = \text{konstant}. \qquad (5)$$

Impulserhaltung beim freien Teilchen

Lagrange-Funktion:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2. \qquad (6)$$

Symmetrietransformation: $x(t) \to x(s,t) = x(t) + s$.

Erhaltungsgröße:

$$I \quad = \quad \frac{\partial L(x(t),\dot{x}(t))}{\partial \dot{x}(t)}\,\frac{\partial x(s,t)}{\partial s}\bigg|_{s=0} \quad = \quad m\dot{x} \quad = \quad \text{konstant} \tag{7}$$

(Impuls).

Drehimpulserhaltung beim freien Teilchen

Lagrange-Funktion:

$$L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) \quad = \quad \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2. \tag{8}$$

Symmetrietransformation:

$$\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x^1(s,t) \\ x^2(s,t) \\ x^3(s,t) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ +\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix} \tag{9}$$

(Rotation um die 3-Achse).
Erhaltungsgröße:

$$\begin{aligned} I \quad &= \quad \frac{\partial L(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))}{\partial \dot{x}^i(t)}\,\frac{\partial x^i(s,t)}{\partial s}\bigg|_{s=0} \quad = \quad -m\dot{x}^1x^2 + m\dot{x}^2x^1 \quad = \quad m\Big(x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1\Big) \quad = \\ &= \quad l^3 \quad = \quad \text{konstant} \end{aligned} \tag{10}$$

(3-Komponente des Drehimpulses).
1-Komponente und 2-Komponente des Drehimpulses analog.

Energieerhaltung aus dem Noether-Theorem

Transformation: $\xi^i(t) \rightarrow \xi^i(s,t) = \xi^i(s+t)$.
Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial s}L(\xi^i(s,t),\dot{\xi}^i(s,t))\bigg|_{s=0} \quad = \quad \frac{\partial}{\partial s}L(\xi^i(s+t),\dot{\xi}^i(s+t))\bigg|_{s=0} \quad = \quad \frac{d}{dt}L(\xi^i(t),\dot{\xi}^i(t)). \tag{11}$$

Kombination mit (2) liefert

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\xi^i(t),\dot{\xi}^i(t))}{\partial \dot{\xi}^k(t)}\dot{\xi}^k(t) - L(\xi^i(t),\dot{\xi}^i(t))\right) \quad = \quad 0. \tag{12}$$

Es folgt die Erhaltungsgröße

$$E = \frac{\partial L(\xi^i(t), \dot{\xi}^i(t))}{\partial \dot{\xi}^k(t)} \dot{\xi}^k(t) - L(\xi^i(t), \dot{\xi}^i(t)) = \text{konstant} \tag{13}$$

(Energie).

Energieerhaltung beim freien Teilchen

Lagrange-Funktion:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2. \tag{14}$$

Energie:

$$E = \frac{\partial L(x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}(t)} \dot{x} - L(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \text{konstant}. \tag{15}$$

Zusammenfassung "wichtiger Symmetrien" und der daraus folgenden Erhaltungsgrößen

- Homogenität des Raumes (Translationsinvarianz im Raum) → Impulserhaltung.
- Isotropie des Raumes (Rotationsinvarianz) → Drehimpulserhaltung.
- Homogenität der Zeit (Translationsinvarianz in der Zeit) → Energieerhaltung.