Kanonische Transformationen

Das Ziel einer kanonischen Transformation ist der Übergang von einer gegebenen Hamilton-Funktion zu einer neuen Hamilton-Funktion in neuen Koordinaten, deren Bewegungsgleichungen einfacher zu lösen sind.

Ausgangspunkt ist das Prinzip der kleinsten Wirkung: Die physikalische Bahnkurve macht die Wirkung extremal.

Addiert man zu einer gegebenen Lagrange-Funktion die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion (diese wird als erzeugende Funktion bezeichnet), verändert sich die zugehörige Bahnkurve nicht (es treten lediglich Oberflächenterme auf, die durch Variation der Bahnkurve nicht verändert werden). Das heißt, Lagrange-Funktionen L und L', die gemäß

$$L = L' + \frac{d}{dt}F \tag{1}$$

in Beziehung stehen, sind physikalisch äquivalent.

L kann durch einen Satz von Koordinaten $(q, \dot{q})$ ausgedrückt werden, L' durch einen anderen Satz von Koordinaten $(Q, \dot{Q})$. Es folgt

$$p\dot{q} - H(p,q) = P\dot{Q} - H'(P,Q) + \frac{d}{dt}F. \tag{2}$$

Gesucht ist nun eine so genannte kanonische Transformation $(p(P,Q), q(P,Q))$ und eine neue Hamilton-Funktion $H'(P,Q)$, die bei gegebenen Koordinaten (p,q) und Hamilton-Funktion $H(p,q)$ Gleichung (1) beziehungsweise Gleichung (2) erfüllen. Das heißt die der neuen Hamilton-Funktion zugeordnete Lagrange-Funktion unterscheidet sich von der "ursprünglichen Lagrange-Funktion" nur um eine totale Zeitableitung; mit anderen Worten beschreibt die neue Hamilton-Funktion das gleiche physikalische System.

Als Abhängigkeit der erzeugenden Funktion F bieten sich sich die Zeit t und eine der vier Kombinationen (q,P), (p,Q), (q,Q) und (p,P) an, das heißt alte und neue Koordinaten werden "gemischt" (die verbleibenden beiden Variablen sind dann jeweils durch die gesuchte Koordinatentransformation festgelegt). Außerdem wird im Folgenden davon ausgegangen, dass F so gewählt wurde, dass die "resultierende Koordinatentransformation" invertierbar ist.

- **q-P-Abhängigkeit:** $F = F(q,P,t)$

  Es gilt

  $$p\dot{q} - H(p,q) = P\dot{Q} - H'(P,Q) + \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{3}$$

  Nach partieller Integration ($P\dot{Q} = (d/dt)(PQ) - \dot{P}Q$; $(d/dt)(PQ)$ kann in F "hineindefiniert" werden) kann eine Koordinatentransformation und eine neue Hamilton-Funktion abgelesen werden die (3) und damit (1) und (2) erfüllt:

  $$p = \frac{\partial F}{\partial q} \quad , \quad Q = \frac{\partial F}{\partial P} \quad , \quad H'(P,Q) = H(p,q) + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{4}$$

- **p-Q-Abhängigkeit:** $F = F(p,Q,t)$
  Aus
  $$p\dot{q} - H(p,q) \quad = \quad P\dot{Q} - H'(P,Q) + \frac{\partial F}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial F}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{5}$$
  kann
  $$q \quad = \quad -\frac{\partial F}{\partial p} \quad , \quad P \quad = \quad -\frac{\partial F}{\partial Q} \quad , \quad H'(P,Q) \quad = \quad H(p,q) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{6}$$
  abgelesen werden.
- **q-Q-Abhängigkeit:** $F = F(q,Q,t)$
  Aus
  $$p\dot{q} - H(p,q) \quad = \quad P\dot{Q} - H'(P,Q) + \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{7}$$
  kann
  $$p \quad = \quad \frac{\partial F}{\partial q} \quad , \quad P \quad = \quad -\frac{\partial F}{\partial Q} \quad , \quad H'(P,Q) \quad = \quad H(p,q) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{8}$$
  abgelesen werden.
- **p-P-Abhängigkeit:** $F = F(p,P,t)$
  Aus
  $$p\dot{q} - H(p,q) \quad = \quad P\dot{Q} - H'(P,Q) + \frac{\partial F}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial F}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{9}$$
  kann
  $$q \quad = \quad -\frac{\partial F}{\partial p} \quad , \quad Q \quad = \quad \frac{\partial F}{\partial P} \quad , \quad H'(P,Q) \quad = \quad H(p,q) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{10}$$
  abgelesen werden.

Beispiel: Lösung des harmonischen Oszillators mit Hilfe einer kanonischen Transformation

Hamilton-Funktion:

$$H \quad = \quad \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \tag{11}$$

Erzeugende Funktion:

$$F(q,Q) \quad = \quad \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q. \tag{12}$$

Koordinatentransformation (Gleichung (8)):

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \cot Q \tag{13}$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}. \tag{14}$$

Auflösen nach p^2 und q^2 ergibt

$$q^2 = \frac{2}{m\omega} P \sin^2 Q \tag{15}$$

$$p^2 = \Big(m\omega q \cot Q\Big)^2 = 2m\omega P \cos^2 Q. \tag{16}$$

Einsetzen von (11) und anschließend von (15) und (16) in (8) liefert die neue, "einfachere" Hamilton-Funktion:

$$H'(P,Q) = H(p,q) + \frac{\partial F}{\partial t} = \omega P. \tag{17}$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen und deren Lösungen:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega \quad \rightarrow \quad Q = \omega t + Q_0 \tag{18}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0 \quad \rightarrow \quad P = P_0. \tag{19}$$

(Interpretation der neuen Koordinaten durch Vergleich mit obigen Gleichungen: Q ist der zeitabhängige "Winkel", ωP die konstante Gesamtenergie).

Einsetzen der Lösung in neuen Koordinaten (18) und (19) in die Koordinatentransformation (15) und (16) liefert die Lösung in alten Koordinaten:

$$q^2 = \frac{2}{m\omega} P_0 \sin^2(\omega t + Q_0) \tag{20}$$

$$p^2 = 2m\omega P_0 \cos^2(\omega t + Q_0). \tag{21}$$

Beispiel: Eichtransformationen sind kanonische Transformationen

Hamilton-Funktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld:

$$H = \frac{1}{2m}\Big(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{q},t)\Big)^2 + eA_0(\mathbf{q},t). \tag{22}$$

Erzeugende Funktion:

$$F(\mathbf{q},\mathbf{P}) = \mathbf{q}\mathbf{P} - \frac{e}{c}\lambda(\mathbf{q},t). \tag{23}$$

(λ ist eine beliebige Funktion von $\mathbf{q}$ und t).

Koordinatentransformation (Gleichung (4)):

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\lambda(\mathbf{q}, t) \tag{24}$$

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{q}. \tag{25}$$

Neue Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H'(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) &= H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial t}F = \\ &= \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\underbrace{\left(\mathbf{A}(\mathbf{Q}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}}\lambda(\mathbf{Q}, t)\right)}_{=\mathbf{A}'(\mathbf{Q}, t)}\right)^2 + e\underbrace{\left(A_0(\mathbf{Q}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\lambda(\mathbf{Q}, t)\right)}_{=A_0'(\mathbf{Q}, t)}. \end{aligned} \tag{26}$$

Dies zeigt, dass Eichtransformationen kanonische Transformationen sind.

Anmerkung: Diese kanonische Transformation verändert die Hamilton-Funktion und die kanonisch konjugierten Impulse (Gleichungen (24) und (26)), lässt aber die eigentliche Observable, die Bahnkurve des geladenen Teilchens, unverändert (Gleichung (25)).