Freie Bewegung auf einer Kugeloberfläche

Bewegungsgleichungen mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips

d'Alembertsches Prinzip:

$$\Big(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}\Big)\delta\mathbf{r} \quad = \quad 0, \tag{1}$$

wobei $\mathbf{F} = 0$.

Kugelkoordinaten und Basisvektoren:

$$\mathbf{r} \quad = \quad \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{2}$$

sowie

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} \quad = \quad \begin{pmatrix} +\sin\vartheta\cos\varphi \\ +\sin\vartheta\sin\varphi \\ +\cos\vartheta \end{pmatrix} \quad = \quad \mathbf{e}_r \tag{3}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta} \quad = \quad \begin{pmatrix} +r\cos\vartheta\cos\varphi \\ +r\cos\vartheta\sin\varphi \\ -r\sin\vartheta \end{pmatrix} \quad = \quad r\mathbf{e}_\vartheta \tag{4}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} \quad = \quad \begin{pmatrix} -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ +r\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad r\sin\vartheta\mathbf{e}_\varphi. \tag{5}$$

Virtuelle Verrückungen:

$$\delta\mathbf{r} \quad = \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta}d\vartheta \quad = \quad r\mathbf{e}_\vartheta d\vartheta \quad , \quad \delta\mathbf{r} \quad = \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}d\varphi \quad = \quad r\sin\vartheta\mathbf{e}_\varphi d\varphi. \tag{6}$$

Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{e}_\vartheta \quad = \quad 0 \quad , \quad m\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{e}_\varphi \quad = \quad 0. \tag{7}$$

Ausdrücken von $\ddot{\mathbf{r}}$ durch Kugelkoordinaten ($r = \text{konstant}$):

$$\dot{\mathbf{r}} \quad = \quad \frac{d}{dt}\Big(r\mathbf{e}_r\Big) \quad = \quad r\bigg(\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\vartheta}\dot{\vartheta} + \frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\bigg) \quad = \quad r\Big(\dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \sin\vartheta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi\Big) \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} \quad = \quad & r\bigg(\ddot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \dot{\vartheta}\bigg(\frac{\partial\mathbf{e}_\vartheta}{\partial\vartheta}\dot{\vartheta} + \frac{\partial\mathbf{e}_\vartheta}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\bigg) + \cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \sin\vartheta\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \sin\vartheta\dot{\varphi}\bigg(\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\vartheta}\dot{\vartheta} + \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\bigg)\bigg) \quad = \\ = \quad & r\Big(\ddot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \dot{\vartheta}\Big(-\dot{\vartheta}\mathbf{e}_r + \cos\vartheta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi\Big) + \cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \sin\vartheta\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi - \sin\vartheta\dot{\varphi}^2\Big(\sin\vartheta\mathbf{e}_r + \cos\vartheta\mathbf{e}_\vartheta\Big)\Big), \end{aligned} \tag{9}$$

wobei

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \vartheta} = \mathbf{e}_\vartheta \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\vartheta \mathbf{e}_\varphi \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} = -\mathbf{e}_r \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \varphi} = \cos\vartheta \mathbf{e}_\varphi \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \vartheta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\vartheta \mathbf{e}_r - \cos\vartheta \mathbf{e}_\vartheta . \tag{12}$$

verwendet wurde.

Damit lauten aufgrund der Orthonormalität der Basisvektoren $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$ und $\mathbf{e}_\varphi$ die Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten

$$\ddot{\vartheta} - \sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 = 0 \quad , \quad \sin\vartheta\ddot{\varphi} + 2\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi} = 0. \tag{13}$$

Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m}{2} r^2 \Big(\dot{\vartheta}^2 + (\sin\vartheta)^2 \dot{\varphi}^2 \Big). \tag{14}$$

Bewegungsgleichung für ϑ:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} \tag{15}$$

ergibt

$$0 = \frac{m}{2} r^2 \left(\frac{d}{dt}\Big(2\dot{\vartheta}\Big) - 2\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 \right) = mr^2 \Big(\ddot{\vartheta} - \sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 \Big) \tag{16}$$

beziehungsweise

$$0 = \ddot{\vartheta} - \sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2. \tag{17}$$

Bewegungsgleichung für φ:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \tag{18}$$

ergibt

$$0 = \frac{m}{2} r^2 \frac{d}{dt} \Big(2(\sin\vartheta)^2 \dot{\varphi} \Big) = mr^2 \sin\vartheta \Big(\sin\vartheta\ddot{\varphi} + 2\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi} \Big) \tag{19}$$

beziehungsweise

$$0 = \sin\vartheta\ddot{\varphi} + 2\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi}. \tag{20}$$