

# Störungstheorie offener Strings – Vier-Tachyon-Tree-Amplitude

Marc Wagner  
mcwagner@theorie3.physik.uni-erlangen.de  
Institut für Theoretische Physik III  
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

15. März 2005

---

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Vier-Tachyon-Tree-Amplitude (Veneziano-Amplitude) mit Methoden der String-Störungstheorie berechnet. Aus dem Ergebnis wird das Spektrum der intermediären String-Zustände abgelesen.

---

## 1 Zusammenfassung bisheriger Ergebnisse

Die Berechnung der Vier-Tachyon-Tree-Amplitude folgt im Wesentlichen [2]. Dieser Abschnitt enthält eine Zusammenfassung einiger Ergebnisse aus [1, 2], die im weiteren Verlauf dieser Ausarbeitung Anwendung finden.

### Definition der Faddeev-Popov-Determinante:

$$1 = \Delta_{\text{FP}}[h, \sigma] \int_F d^\mu t \int D\gamma \delta[h^{[\gamma]} - \hat{h}(t)] \prod_{(\alpha, i) \in f} \delta(\sigma_i^{[\gamma]\alpha} - \hat{\sigma}_i^\alpha). \quad (1)$$

$\int_F d^\mu t \dots$  Integral über alle Moduli.

$\int D\gamma \dots$  Integral über alle Eichtransformationen (Diffeomorphismen und Weyl-Transformationen).

$h^{[\gamma]}$  Die durch die Eichtransformation  $\gamma$  aus  $h$  erzeugte World-Sheet-Metrik.

$\hat{h}(t)$  Der aus dem durch die Moduli  $t$  bestimmten Eichorbit ausgewählte Repräsentant (ebenfalls eine World-Sheet-Metrik).

$\prod_{(\alpha, i) \in f} \dots$  Produkt über eine Anzahl von Koordinaten auf dem World-Sheet, die der Anzahl der konformen Killing-Vektoren entspricht ( $\alpha$  numeriert die zwei Dimensionen des World-Sheets,  $i$  numeriert Punkte auf dem World-Sheet).

$\sigma_i^{[\gamma]\alpha}$  Die  $\alpha$ -te Komponente eines Punktes  $\sigma_i$  auf dem World-Sheet nach der Eichtransformation  $\gamma$ .

$\hat{\sigma}_i^\alpha$  Der eichfixierte Wert der  $\alpha$ -ten Komponente eines Punktes  $\sigma_i$  auf dem World-Sheet.

### Polyakov-Wirkung (Euklidisch):

$$S[X, h] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\bar{h}} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X_\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (2)$$

### Erwartungswerte:

$$\begin{aligned} \langle \text{“Operatoren”} \rangle &= \# \sum_{\text{Topologien}} \int DX \int Dh e^{-S[X, h] - \lambda\chi} \left( \text{“Operatoren”} \right) = \\ &= \sum_{\text{Topologien}} \int_F d^{\mu t} \Delta_{\text{FP}}[\hat{h}(t), \hat{\sigma}] \int DX e^{-S[X, \hat{h}(t)] - \lambda\chi} \left( \text{“Operatoren”} \right) \prod_{(\alpha, i) \in f} \delta(\sigma_i^\alpha - \hat{\sigma}_i^\alpha). \end{aligned} \quad (3)$$

$\sum_{\text{Topologien}} \dots$  Summe über alle World-Sheet-Topologien.

$\int DX \dots$  Integral über alle String-Koordinaten  $X_\mu$ .

$\chi$  Euler-Charakteristik ( $\chi = \frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma \sqrt{\bar{h}} R + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} ds k$ ; dabei ist  $R$  der Ricci-Skalar und  $k$  die geodätische Krümmung; [2], Seite 82). Kugel  $\chi = 2$ , Torus  $\chi = 0$ , Scheibe  $\chi = 1$ , Scheibe mit  $n$  Löchern  $\chi = 1 - n$ .

$\lambda$  Proportional zu den String-Kopplungskonstanten:  $g_{\text{open}}^2 \propto g_{\text{closed}} \propto e^\lambda$ .

### Geistwirkung:

$$S_g[b, c, \hat{h}] = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{h}} b^{\alpha\beta} (P_1 c)_{\alpha\beta}. \quad (4)$$

$P_1$  Ein Differentialoperator:  $\frac{1}{2}(\nabla_\alpha c_\beta + \nabla_\beta c_\alpha - h_{\alpha\beta} \nabla_\gamma c^\gamma)$ .

### Pfadintegral-Ausdruck für die Faddeev-Popov-Determinante:

$$\Delta_{\text{FP}}[\hat{h}, \hat{\sigma}] = \frac{1}{n_R} \int Db Dc e^{-S_g[b, c, \hat{h}]} \prod_{k=1}^{\mu} \frac{1}{4\pi} \left( \int d^2\sigma \sqrt{\hat{h}} b^{\beta\gamma}(\sigma) \frac{\partial}{\partial t^k} \hat{h}_{\beta\gamma}(\sigma) \right) \prod_{(\alpha, i) \in f} c^\alpha(\hat{\sigma}_i). \quad (5)$$

$n_R$  Ein Symmetriefaktor der nur dann relevant ist, falls die Eichfixierung so gewählt wurde, dass die  $\delta$ -Funktionen  $\delta(\sigma_i^\alpha - \hat{\sigma}_i^\alpha)$  an mehr als einem Punkt ungleich null sind.

$\int Db Dc \dots$  Integral über alle Grassmann-wertigen, symmetrischen, spurlosen Felder  $b^{\alpha\beta}$  und alle Grassmann-wertigen Felder  $c^\alpha$ .

$\partial/\partial t^k$  Ableitung nach dem  $k$ -ten Moduli.

## 2 Standarddarstellung von Tree-Level-World-Sheets, Moduli und konforme Killing-Vektoren

Ausgangspunkt für das Berechnen der Tree-Level-Streuamplitude vier offener String-Tachyonen ist ein beliebiges World-Sheet-Diagramm ohne Löcher mit vier offenen Strings im Unendlichen. Durch eine geeignete Symmetrietransformation (eine Kombination aus einer Koordinaten- und einer Weyl-Transformation) kann eine flache World-Sheet-Metrik erzielt werden, das heißt  $h^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$  [1]. Das resultierende World-Sheet-Diagramm kann durch eine Schwarz-Christoffel-Transformation, eine konforme Abbildung außer an Ecken des abzubildenden Koordinatenbereichs, auf die obere Halbebene  $\bar{\mathbb{H}}$  abgebildet werden ([4], Seite 492). Eine weitere Weyl-Transformation führt zurück auf die flache World-Sheet-Metrik. Die vier offenen Strings im Unendlichen entsprechen dann vier Punkten auf der reellen Achse. Dies ist die im weiteren Verlauf dieser Arbeit benutzte Standarddarstellung aller auftretenden Tree-Level-World-Sheets. Im Folgenden gilt also  $\hat{h}^{\alpha\beta}(t) = \hat{h}^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$  (Abbildung 1).

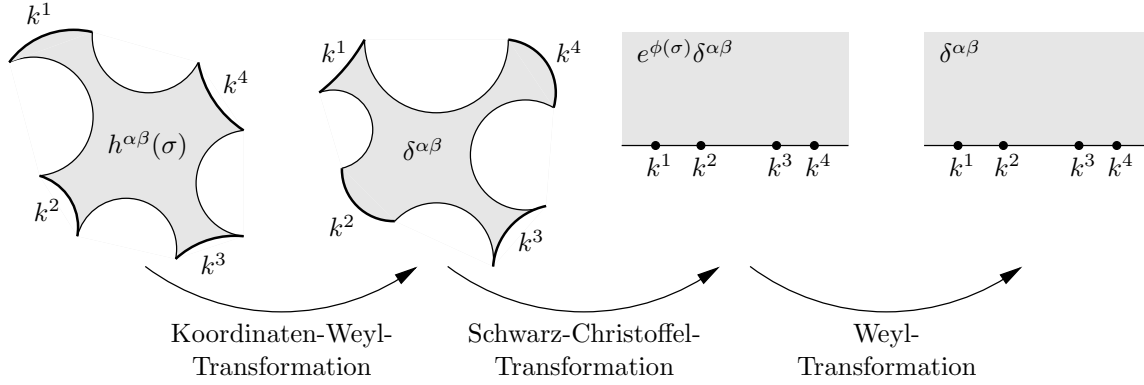


Abbildung 1: Standarddarstellung von Tree-Level-World-Sheets.

Die obere Halbebene  $\bar{\mathbb{H}}$  besitzt keine Moduli ([2], Seite 168).

Die konformen Abbildungen, die  $\bar{\mathbb{H}}$  auf sich selbst abbilden, sind durch

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 1 \quad (6)$$

gegeben ( $z = \sigma^1 + i\sigma^2$ ; [4], Seite 502). Aus diesen durch drei reelle Größen bestimmten Abbildungen können die drei konformen Killing-Vektoren  $v_1, v_2$  und  $v_3$  von  $\bar{\mathbb{H}}$  bestimmt werden. Dazu betrachtet man drei unabhängige, infinitesimale Transformationen gemäß (6):

$$z \rightarrow z + \epsilon \implies v_1 = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$z \rightarrow (1 + \epsilon)z \implies v_2 = z = \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$z \rightarrow \frac{z}{\epsilon z + 1} = z - \epsilon z^2 \implies v_3 = z^2 = \begin{pmatrix} (\sigma^1)^2 - (\sigma^2)^2 \\ 2\sigma^1\sigma^2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Die drei vorhandenen Freiheitsgrade können dazu verwendet werden, drei Punkte auf der reellen Achse beliebig festzulegen, im hier vorliegenden Fall die Positionen dreier Vertex-Operatoren. Hierbei gilt die Einschränkung, dass die zyklische Anordnung der Punkte nicht verändert werden darf. Da drei Punkte auf zwei verschiedene Weisen zyklisch angeordnet werden können, besitzt die obere Halbebene mit drei Punctures einen diskreten Moduli, der zwei verschiedene Werte annehmen kann ([4], Abschnitt 22.6).

Die obere Halbebene mit vier Punctures besitzt einen diskreten Moduli, der sechs verschiedene Werte annehmen kann (sechs zyklische Anordnungen von vier Punkten), und einen kontinuierlichen Moduli, der die Position der nicht festgehaltenen Puncture angibt (kann jede Position zwischen den beiden festgehaltenen benachbarten Punctures annehmen).

### 3 Vier-Tachyon-Tree-Amplitude (Ansatz)

Die Vier-Tachyon-Tree-Amplitude ist durch den Erwartungswert von vier Tachyon-Vertex-Operatoren gegeben,

$$S(k^1, k^2, k^3, k^4) = ig_{\text{open}}^4 \left\langle \prod_{i=1}^4 \int dy_i : e^{ik_\mu^i X_\mu(y_i, 0)} : \right\rangle_{\text{Tree}}. \quad (10)$$

$\langle \dots \rangle_{\text{Tree}}$  bedeutet, dass im Pfadintegral nur über Tree-Level-World-Sheets integriert wird.  $: \dots :$  steht für Boundary-Normal-Ordering ([2], Seite 38 und Seite 175). Es gilt

$$: e^{ik_\mu^i X_\mu(y_i, 0)} : = |y_i - y_j|^{-\alpha' k_\mu^i k_\mu^j} e^{ik_\mu^i X_\mu(y_i, 0)}. \quad (11)$$

Boundary-Normal-Ordering wird gewählt um Unendlichkeiten in  $S$  zu vermeiden.

Einsetzen von (3) in (10) führt auf

$$\begin{aligned} S(k^1, k^2, k^3, k^4) &= \\ &= ig_{\text{open}}^4 e^{-\lambda \Delta_{\text{FP}}[\hat{h}, \hat{y}]} \prod_{i=1}^4 \int dy_i |y_i - y_j|^{-\alpha' k_\mu^i k_\mu^j} \int DX e^{-S[X, \hat{h}]} \prod_{j=1}^4 e^{ik_\mu^j X_\mu(y_j, 0)} \\ &\quad \left( \left( \prod_{k=1}^3 \delta(y_k - \hat{y}_k) \right) + (\hat{y}_1 \leftrightarrow \hat{y}_2) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Die drei eichfixierten Koordinaten auf dem Worldsheet sind die drei Positionen  $\hat{y}_1$ ,  $\hat{y}_2$  und  $\hat{y}_3$  der durch 1 bis 3 indizierten Vertex-Operatoren auf der reellen Achse. Hierbei wird über beide zyklischen Anordnungen summiert (der  $(\hat{y}_1 \leftrightarrow \hat{y}_2)$ -Term). Eine zyklische Anordnung reicht nicht aus, da es sich um physikalisch nicht-äquivalente World-Sheets handelt (wie in Abschnitt 2 erwähnt, hat die obere Halbebene mit drei Punctures einen diskreten Moduli, der zwei verschiedene Werte annehmen kann).

## 4 Berechnen des $X$ -Pfadintegrals

Das Ziel dieses Abschnitts ist das Berechnen des  $X$ -Pfadintegrals

$$\int DX e^{-S[X, \hat{h}]} \prod_{i=1}^4 e^{ik_\mu^i X_\mu(y_i, 0)} \quad (13)$$

in (12). Es wird über alle Felder  $X_\mu$  der oberen Halbebene integriert, die Neumannsche Randbedingungen erfüllen (der Rand besteht aus der reellen Achse und dem unendlich fernen Punkt). Diese Randbedingungen werden dadurch realisiert, dass nicht nur über die obere Halbebene sondern über die gesamte komplexe Zahlenebene mit der Bedingung  $X_\mu(z) = X_\mu(\bar{z})$  integriert wird.

Zunächst wird das vom noch nicht näher spezifizierten Strom  $J$  abhängende erzeugende Funktional  $Z$  berechnet:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int DX e^{-S[X, \hat{h}] + i \int d^2\sigma J_\mu(\sigma) X_\mu(\sigma)} = \\ &= \int DX e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{h}} \hat{h}^{\alpha\beta} \partial_\alpha X_\mu \partial_\beta X_\mu + i \int d^2\sigma J_\mu(\sigma) X_\mu(\sigma)} = \\ &= \int DX e^{\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{h}} X_\mu \Delta X_\mu + i \int d^2\sigma J_\mu(\sigma) X_\mu(\sigma)} \end{aligned} \quad (14)$$

(die bei der partiellen Integration entstehenden Oberflächenterme verschwinden aufgrund der Neumannschen Randbedingungen).

Um das Integral in (14) zu lösen, wird  $X_\mu$  in einer Basis aus Eigenfunktionen zu  $\Delta$  entwickelt:

$$X_\mu(\sigma) = \sum_I x_\mu^I X^I(\sigma). \quad (15)$$

Die Basisfunktionen  $X^I$  werden so gewählt, dass

$$X^I(z) = X^I(\bar{z}) \quad (16)$$

$$\Delta X^I(\sigma) = -(\omega^I)^2 X^I(\sigma) \quad (17)$$

gilt und außerdem Orthonormalität und Vollständigkeit vorliegt:

$$\int d^2\sigma \sqrt{\hat{h}} X^I(\sigma) X^J(\sigma) = \delta^{IJ} \quad (18)$$

$$\sum_I \sqrt{\hat{h}} X^I(\sigma) X^I(\sigma') = \delta^{(2)}(\sigma - \sigma'). \quad (19)$$

Für das erzeugende Funktional (14) folgt damit

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \prod_{I, \mu} dx_\mu^I e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \sum_J x_\mu^J (\omega^J)^2 x_\mu^J + i \sum_J J_\mu^J x_\mu^J} = \\ &= \int \prod_\mu dx_\mu^0 e^{i J_\mu^0 x_\mu^0} \int \prod_{I \neq 0, \mu} dx_\mu^I e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \sum_{J \neq 0} x_\mu^J (\omega^J)^2 x_\mu^J + i \sum_{J \neq 0} J_\mu^J x_\mu^J} \end{aligned} \quad (20)$$

mit

$$J_\mu^I = \int d^2\sigma J_\mu(\sigma) X^I(\sigma) \quad (21)$$

(im zweiten Schritt wurde der Nullmode abgespalten, der separat behandelt wird; es gibt genau einen Nullmode, die konstante Funktion;  $\sigma^1$  und  $\sigma^2$  scheiden aufgrund der Randbedingungen als Nullmoden aus). Das erste Integral liefert eine  $\delta$ -Funktion, das zweite Integral kann durch quadratische Ergänzung gelöst werden:

$$Z[J] = (2\pi)^d \delta^{(d)}(J^0) \left( \det' \left( \frac{-\Delta}{4\pi^2 \alpha'} \right) \right)^{-d/2} e^{-\sum_{I \neq 0} \frac{\pi \alpha' J_\mu^I J_\mu^I}{(\omega^I)^2}} \quad (22)$$

( $\det'$  ist die Determinante mit ausgenommenem Nullmode). Einsetzen von (21) führt auf

$$Z[J] = (2\pi)^d \delta^{(d)}(J^0) \left( \det' \left( \frac{-\Delta}{4\pi^2 \alpha'} \right) \right)^{-d/2} e^{-\frac{1}{2} \int d^2\sigma \int d^2\sigma' J_\mu(\sigma) G'(\sigma, \sigma') J_\mu(\sigma')} \quad (23)$$

mit

$$G'(\sigma, \sigma') = 2\pi \alpha' \sum_{I \neq 0} \frac{X^I(\sigma) X^I(\sigma')}{(\omega^I)^2}. \quad (24)$$

$G'$  ist die Greensfunktion zum Laplace-Operator  $\Delta$  (mit Ausnahme des fehlenden Nullmodes):

$$\Delta^{(\sigma)} G'(\sigma, \sigma') = -2\pi \alpha' \sum_{I \neq 0} X^I(\sigma) X^I(\sigma') = -2\pi \alpha' \left( \frac{\delta^{(2)}(\sigma - \sigma')}{\sqrt{\hat{h}}} - (X^0)^2 \right). \quad (25)$$

Eine explizite Form von  $G'$  ist

$$G'(z, z') = -\frac{\alpha'}{2} (\ln |z - z'| + \ln |z - \bar{z}'|). \quad (26)$$

$G'$  erfüllt nicht nur die Differentialgleichung (25) (bis auf Terme, die aufgrund von Impulserhaltung ohnehin wegfallen; [2], Seite 174) sondern auch die über die Basisfunktionen vorgegebenen Randbedingungen  $G'(z_i, z_j) = G'(\bar{z}_i, z_j)$  und  $G'(z_i, z_j) = G'(z_i, \bar{z}_j)$ .

Einsetzen des Stroms

$$J_\mu(\sigma) = \sum_{i=1}^4 k_\mu^i \delta^{(2)}(\sigma - \sigma_i) \quad (27)$$

( $\sigma_i = (y_i, 0)$ ) in (14) beziehungsweise in (23) ergibt

$$Z[J] = \int DX e^{-S[X, \hat{h}]} \prod_{i=1}^4 e^{ik_\mu^i X_\mu(y_i, 0)} \quad (28)$$

und

$$Z[J] = \frac{(2\pi)^d \delta^{(d)}(k^1 + k^2 + k^3 + k^4)}{(X^0)^d} \left( \det' \left( \frac{-\Delta}{4\pi^2 \alpha'} \right) \right)^{-d/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 k_\mu^i k_\mu^j G'(\sigma_i, \sigma_j)}. \quad (29)$$

Gleichsetzen von (28) und (29) und Einsetzen von (26) führt auf

$$\begin{aligned} \int DX e^{-S[X, \hat{h}(t)]} \prod_{i=1}^4 e^{ik_\mu^i X_\mu(y_i, 0)} &= \\ &= C^X (2\pi)^d \delta^{(d)}(k^1 + k^2 + k^3 + k^4) \prod_{i=1}^4 \prod_{j=1}^4 |y_i - y_j|^{\alpha' k_\mu^i k_\mu^j} \end{aligned} \quad (30)$$

mit

$$C^X = \frac{1}{(X^0)^d} \left( \det' \left( \frac{-\Delta}{4\pi^2 \alpha'} \right) \right)^{-d/2}. \quad (31)$$

## 5 Berechnen der Faddeev-Popov-Determinante

Ziel dieses Abschnitts ist das Berechnen der Faddeev-Popov-Determinante in (12). Da die obere Halbebene keine Moduli besitzt, reduziert sich (5) auf

$$\Delta_{\text{FP}}[\hat{h}, \hat{\sigma}] = \int Db Dc e^{-S_g[b, c, \hat{h}]} \prod_{i=1}^3 c^1(\hat{\sigma}_i). \quad (32)$$

Integriert wird über alle Grassmann-wertigen, spurlosen, symmetrischen Felder  $b^{\alpha\beta}$  und alle Grassmann-wertigen Felder  $c^\alpha$  der oberen Halbebene. Die Felder sollen dabei den Randbedingungen

$$n_\alpha t_\beta b^{\alpha\beta}(\sigma^1, 0) = b^{21}(\sigma^1, 0) = 0 \quad (33)$$

$$n_\alpha c^\alpha(\sigma^1, 0) = c^2(\sigma^1, 0) = 0 \quad (34)$$

genügen ( $n_\alpha = (0, 1)$  ist die Normale des Randes,  $t_\alpha = (1, 0)$  die Tangente des Randes). (33) entspricht dem Oberflächenterm, der beim Berechnen der klassischen Bewegungsgleichung für  $b^{\alpha\beta}$  entsteht. (34) ist äquivalent zu der Forderung, dass die Koordinatentransformationen das Parametergebiet, in diesem Fall die obere Halbebene, unverändert lassen.

Um das Pfadintegral zu lösen werden die Felder  $b^{\alpha\beta}$  und  $c^\alpha$  nach speziellen Basisfunktionen  $B_I^{\alpha\beta}$  und  $C_I^\alpha$  entwickelt:

$$b^{\alpha\beta}(\sigma) = \sum_I b_I B_I^{\alpha\beta}(\sigma) \quad (35)$$

$$c^\alpha(\sigma) = \sum_I c_I C_I^\alpha(\sigma). \quad (36)$$

Diese Basisfunktionen sind Eigenfunktionen zu  $P_1 P_1^\dagger$  beziehungsweise zu  $P_1^\dagger P_1$  ( $P_1^\dagger$  ist durch  $\int d^2\sigma \sqrt{\hat{h}} (P_1^\dagger b)^\alpha c_\alpha = \int d^2\sigma \sqrt{\hat{h}} b^{\alpha\beta} (P_1 c)_{\alpha\beta}$  definiert; es gilt  $(P_1^\dagger b)^\alpha = -\nabla_\beta b^{\alpha\beta}$ ):

$$(P_1 P_1^\dagger B_I)^\alpha{}^\beta(\sigma) = (v_I)^2 B_I^{\alpha\beta}(\sigma) \quad (37)$$

$$(P_1^\dagger P_1 C_I)^\alpha(\sigma) = (v_I')^2 C_I^\alpha(\sigma). \quad (38)$$

Außerdem werden sie orthonormal gewählt:

$$\int d^2\sigma \sqrt{\hat{h}} B_I^{\alpha\beta} B_{J\alpha\beta} = \delta_{IJ} \quad (39)$$

$$\int d^2\sigma \sqrt{\hat{h}} C_I^\alpha C_{J\alpha} = \delta_{IJ}. \quad (40)$$

$(P_1 C_I)^{\alpha\beta}$  ist Eigenfunktion zu  $P_1 P_1^\dagger$  falls  $C_I^\alpha$  kein Nullmode von  $P_1$  ist:

$$(P_1 P_1^\dagger (P_1 C_I))^{\alpha\beta} = (P_1 (P_1^\dagger P_1 C_I))^{\alpha\beta} = (v_I')^2 (P_1 C_I)^{\alpha\beta}. \quad (41)$$

Nach entsprechender Normierung (und geeigneter Wahl der Basisfunktionen  $B_I^{\alpha\beta}$ ) gilt

$$\frac{1}{v_I'} (P_1 C_I)^{\alpha\beta} = B_I^{\alpha\beta}. \quad (42)$$

Analog lässt sich

$$\frac{1}{v_I} (P_1^\dagger B_I)^\alpha = C_I^\alpha \quad (43)$$

zeigen. Ineinander einsetzen von (38), (42) und (43) führt auf

$$v_I = v_I'. \quad (44)$$

Für die Geistwirkung (4) folgt

$$\begin{aligned} S_g[b, c, \hat{h}] &= \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{h}} \sum_I b_I B_I^{\alpha\beta} \left( P_1 \left( \underbrace{\sum_j c_{0j} C_{0j}}_{\text{Nullmoden}} + \underbrace{\sum_J c_J C_J}_{\text{Rest}} \right) \right)_{\alpha\beta} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{h}} \sum_{I,J} b_I B_I^{\alpha\beta} v_J c_J B_{J\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \sum_I b_I v_I c_I. \end{aligned} \quad (45)$$

Die Entwicklungskoeffizienten und die Basisfunktionen der Nullmoden von  $P_1^\dagger P_1$  (die Nullmoden von  $P_1^\dagger P_1$  sind gleich den Nullmoden von  $P_1$ ) wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit umbenannt:  $c_J \rightarrow c_{0j}$  und  $C_J \rightarrow C_{0j}$ . Die Entwicklungskoeffizienten der Nullmoden tragen zur Geistwirkung nicht bei.



Einsetzen in (32) und Ausnutzen der Grassmann-Eigenschaften ergibt

$$\begin{aligned}
\Delta_{\text{FP}}[\hat{h}, \hat{\sigma}] &= \int dc_{01} dc_{02} dc_{03} \prod_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{0j} C_{0j}^1(\hat{\sigma}_i) \int \prod_I db_I dc_I e^{-\frac{1}{2\pi} \sum_J b_J v_J c_J} = \\
&= \det(C_{0j}^1(\hat{\sigma}_i)) \det' \left( \frac{P_1^\dagger P_1}{4\pi^2} \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Die drei Nullmoden  $C_{0j}^1(\hat{\sigma}_i)$  in der ersten Determinante sind bis auf Orthonormalität gerade die drei konformen Killing-Vektoren  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v_3$  ((7), (8) und (9)). Die Determinante kann in dieser Basis geschrieben werden wobei ein für die Tree-Amplitude irrelevanter Faktor  $\tilde{C}^{bc}$  auftritt:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\text{FP}}[\hat{h}, \hat{\sigma}] &= \tilde{C}^{bc} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hat{y}_1 & \hat{y}_2 & \hat{y}_3 \\ \hat{y}_1^2 & \hat{y}_2^2 & \hat{y}_3^2 \end{pmatrix} \det' \left( \frac{P_1^\dagger P_1}{4\pi^2} \right)^{1/2} = \\
&= \tilde{C}^{bc} (\hat{y}_1 - \hat{y}_2)(\hat{y}_2 - \hat{y}_3)(\hat{y}_3 - \hat{y}_1) \det' \left( \frac{P_1^\dagger P_1}{4\pi^2} \right)^{1/2} = \\
&= C^{bc} |\hat{y}_1 - \hat{y}_2| |\hat{y}_2 - \hat{y}_3| |\hat{y}_3 - \hat{y}_1|
\end{aligned} \tag{47}$$

mit

$$C^{bc} = \tilde{C}^{bc} \det' \left( \frac{P_1^\dagger P_1}{4\pi^2} \right)^{1/2} \tag{48}$$

(im letzten Schritt wurde die zyklische Anordnung  $y_1 y_2 y_3$  angenommen).

## 6 Vier-Tachyon-Tree-Amplitude (Ergebnis und Interpretation)

Nach Einsetzen von (30) und (47) in (12) ergibt sich für die Vier-Tachyon-Tree-Amplitude

$$\begin{aligned}
S(k^1, k^2, k^3, k^4) &= \\
&= i C^X C^{bc} g_{\text{open}}^4 e^{-\lambda} (2\pi)^d \delta^{(d)}(k^1 + k^2 + k^3 + k^4) |\hat{y}_1 - \hat{y}_2| |\hat{y}_2 - \hat{y}_3| |\hat{y}_3 - \hat{y}_1| \\
&\quad \int \prod_{i=1}^4 dy_i \prod_{j \neq k} |y_j - y_k|^{\alpha' k_\mu^j k_\mu^k} \left( \left( \prod_{l=1}^3 \delta(y_l - \hat{y}_l) \right) + (\hat{y}_1 \leftrightarrow \hat{y}_2) \right).
\end{aligned} \tag{49}$$

Die Eichfixierung  $\hat{y}_1 = 0$ ,  $\hat{y}_2 = 1$  und  $\hat{y}_3 = \infty$  erlaubt die Aufspaltung des verbleibenden  $y_4$ -Integrals in drei Teile ( $\int_{-\infty}^{\infty} dy_4 \dots = \int_{-\infty}^0 dy_4 \dots + \int_0^1 dy_4 \dots + \int_1^{\infty} dy_4 \dots$ ), die jeweils unterschiedlichen zyklischen Anordnungen von  $\hat{y}_1$ ,  $\hat{y}_2$ ,  $\hat{y}_3$  und  $y_4$  entsprechen. Aufgrund von Symmetrieargumenten ist es ausreichend, eines der drei Integrale zu betrachten (die anderen beiden

müssen bis auf Indexvertauschung dieselben Ergebnisse liefern):

$$\begin{aligned}
S(k^1, k^2, k^3, k^4) &= \\
&= iC^X C^{bc} g_{\text{open}}^4 e^{-\lambda} (2\pi)^d \delta^{(d)}(k^1 + k^2 + k^3 + k^4) \\
&\quad \left( |\hat{y}_3|^{2+2\alpha' k_\mu^3 (k_\mu^1 + k_\mu^2 + k_\mu^4)} \int_0^1 dy_4 |y_4|^{2\alpha' k_\mu^1 k_\mu^4} |1 - y_4|^{2\alpha' k_\mu^2 k_\mu^4} + (k^i \leftrightarrow k^j) \right) = \\
&= iC^X C^{bc} g_{\text{open}}^4 e^{-\lambda} (2\pi)^d \delta^{(d)}(k^1 + k^2 + k^3 + k^4) \\
&\quad \left( \int_0^1 d\rho |\rho|^{2\alpha' k_\mu^1 k_\mu^4} |1 - \rho|^{2\alpha' k_\mu^2 k_\mu^4} + (k^i \leftrightarrow k^j) \right). \tag{50}
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde  $k_\mu^i k_\mu^i = 1/\alpha'$  (die ein- und auslaufenden Tachyonen müssen sich auf der Massenschale befinden) und  $k^1 + k^2 + k^3 + k^4 = 0$  (gilt aufgrund der  $\delta$ -Funktion) benutzt.  $(k^i \leftrightarrow k^j)$  steht für fünf ähnliche Terme die durch Indexvertauschung entstehen, wobei zwei davon jeweils identisch sind.

Die Mandelstam-Variablen sind durch

$$s = -(k^1 + k^2)^2, \quad t = -(k^1 + k^3)^2, \quad u = -(k^1 + k^4)^2 \tag{51}$$

definiert. Sie entsprechen den Massen der intermediären String-Zustände. Es folgt

$$2\alpha' k_\mu^1 k_\mu^2 = -\alpha' s - 2, \quad 2\alpha' k_\mu^1 k_\mu^3 = -\alpha' t - 2, \quad 2\alpha' k_\mu^1 k_\mu^4 = -\alpha' u - 2. \tag{52}$$

Einsetzen in (50) liefert

$$\begin{aligned}
S(k^1, k^2, k^3, k^4) &= \\
&= i2C^X C^{bc} g_{\text{open}}^4 e^{-\lambda} (2\pi)^d \delta^{(d)}(k^1 + k^2 + k^3 + k^4) \left( I(s, t) + I(t, u) + I(u, s) \right) \tag{53}
\end{aligned}$$

mit

$$I(s, t) = \int_0^1 d\rho \rho^{-\alpha' s - 2} (1 - \rho)^{-\alpha' t - 2} = \frac{\Gamma(-\alpha' s - 1) \Gamma(-\alpha' t - 1)}{\Gamma(-\alpha' s - \alpha' t - 2)}. \tag{54}$$

Analog zur Quantenfeldtheorie können auch hier an den Polstellen der Streuamplitude die Massen der intermediären Teilchen abgelesen werden. Die Gamma-Funktion hat Polstellen bei null und bei den negativen ganzen Zahlen. Sie hat keine Nullstellen. Die Funktionen  $I(s, t)$ ,  $I(t, u)$  beziehungsweise  $I(u, s)$  haben demnach Polstellen bei

$$s = -(k^1 + k^2)^2 = \frac{n - 1}{\alpha'}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{55}$$

$$t = -(k^1 + k^3)^2 = \frac{n - 1}{\alpha'}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{56}$$

$$u = -(k^1 + k^4)^2 = \frac{n - 1}{\alpha'}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{57}$$

Für gerade  $n$  treten diese Polstellen auch in der Streuamplitude (53) auf. Zu den intermediären String-Zustände gehören damit das Tachyon, die erste massive Anregung und alle weiteren ungeraden massiven Anregungen.

Bei ungeraden  $n$  besitzen die Polstellen umgekehrte Vorzeichen und heben sich gerade weg. Zum Beispiel gilt für  $s = (n - 1)/\alpha'$ ,  $n$  ungerade, und  $t$  beliebig ( $u$  ist durch  $s + t + u = -4/\alpha'$  bestimmt)

$$I(s, t) + I(t, u) + I(u, s) = \frac{\Gamma(-\alpha't - 1)\Gamma(\alpha't + n + 2)}{n!} + \left( \text{“endliche Terme”} \right). \quad (58)$$

Eine Polstelle und damit ein intermediärer Zustand entsprechender Masse tritt hier nur bei spezieller Wahl von  $t$  auf, das heißt bei fest vorgegebenen Winkeln zwischen ein- und auslaufenden Teilchen (falls ein solcher Prozess kinematisch überhaupt erlaubt ist).

Vergleich des Tachyon-Pols der Vier-Tachyon-Streuamplitude und desselben Pols ein einem aus zwei Drei-Tachyon-Streuamplituden zusammengesetzten Prozesses liefert den Proportionalitätsfaktor zwischen  $g_{\text{open}}^2$  und  $e^\lambda$ :

$$e^\lambda = \alpha' C^X C^{bc} g_{\text{open}}^2 \quad (59)$$

([2], Seite 182). Einsetzen in (53) liefert

$$S(k^1, k^2, k^3, k^4) = \frac{i2g_{\text{open}}^2}{\alpha'} (2\pi)^d \delta^{(d)}(k^1 + k^2 + k^3 + k^4) \left( I(s, t) + I(t, u) + I(u, s) \right). \quad (60)$$

Diese Streuamplitude wurde bereits 1968 von Veneziano postuliert, lange bevor die in dieser Ausarbeitung präsentierte Herleitung und ihre Beziehung zur String-Theorie bekannt war [3].

## Literatur

- [1] F. Lenz. Vorlesungen zur string-störungstheorie, erlangen, 8. - 22. februar 2005.
- [2] J. Polchinski. *String Theory - An Introduction to the Bosonic String (Volume 1)*. Cambridge University Press, 1998.
- [3] G. Veneziano. Construction of a crossing-symmetric, regge behaved amplitude for linearly rising trajectories. *Il Nuovo Cimento*, A57:190–197, 1968.
- [4] B. Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2004.