

The pseudoparticle approach in $SU(2)$ Yang-Mills theory

Marc Wagner

mcwagner@theorie3.physik.uni-erlangen.de

<http://theorie3.physik.uni-erlangen.de/~mcwagner>

24. Juli 2006

Gliederung

- Einleitung, Grundlagen, Ziel meiner Arbeit:
 - Was ist Confinement?
 - Pfadintegrale in der QM
 - Pfadintegrale und statistische Physik
 - Pfadintegrale in der QFT
- Pseudoteilchen-Formalismus:
 - Was ist der PT-Formalismus?
 - Grundprinzip des PT-Formalismus
- Ergebnisse:
 - Test des PT-Formalismus
 - PT-Reichweite und Confinement
 - Topologische Ladung und Confinement

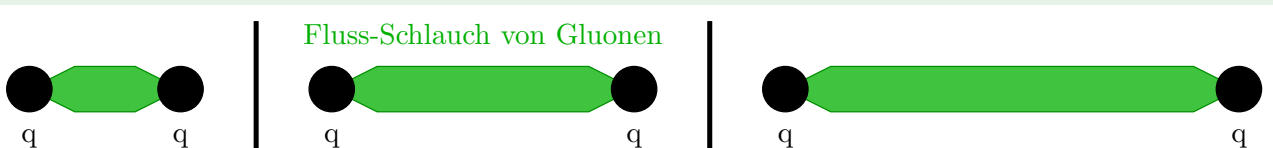
Was ist Confinement? (1)

- Quantenchromodynamik (QCD, starke Wechselwirkung): Eine Eichtheorie, die die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen beschreibt.
- Experimentelle Tatsache: Es gibt keine isolierten Quarks. Quarks treten stets in Zweiergruppen (Mesonen) oder Dreiergruppen (Baryonen) auf.
→ **Confinement** (Quarks sind aneinander gebunden, d.h. “gefangen”).
- Die Kraft zwischen zwei Quarks (bei hinreichend großen Abständen) ist unabhängig von deren Abstand:

$$F_{qq}(R) = \sigma \quad , \quad V_{qq}(R) = \sigma R$$

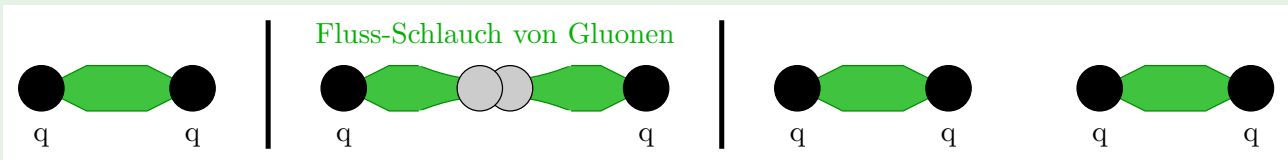
(σ : Stringspannung).

- String-Modell: Zwei Quarks sind durch einen Schlauch von Gluonen verbunden; die Schlauchdicke ist unabhängig vom Abstand, genau wie die Energiedichte im Schlauch.

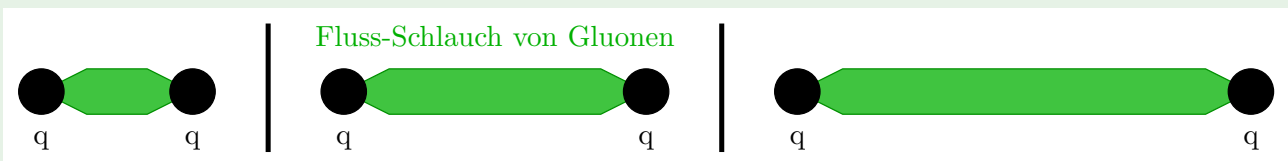


Was ist Confinement? (2)

- Trennung leichter Quarks: Ab einem gewissen Abstand ist es energetisch günstiger ($E = mc^2$) ein zusätzliches Quark-Antiquark-Paar zu erzeugen; der Fluss-Schlauch reißt; man erhält zwei Quark-Antiquark-Paare.



- Trennung (unendlich) schwerer Quarks: Unmöglich ... die Kraft ist unabhängig vom Abstand, das Quark-Antiquark-Potential ist linear.



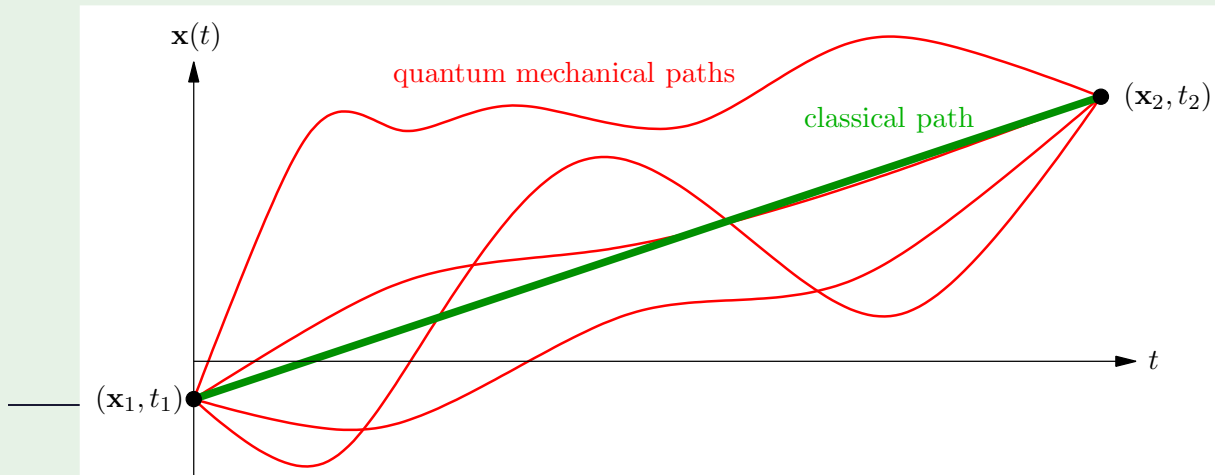
- Was ist der Confinement zu Grunde liegende physikalische Mechanismus?

Pfadintegrale in der QM

- Grundprinzip: Ein QM Teilchen, das sich vom Ort \mathbf{x}_1 zur Zeit t_1 zum Ort \mathbf{x}_2 zur Zeit t_2 bewegt, nimmt alle möglichen Pfade gleichzeitig. Jeder Pfad wird gemäß $e^{-S[\mathbf{x}]}$ gewichtet (S : Klassische Wirkung).
- QM Erwartungswert einer Observablen \mathcal{O} (“sum over histories”):

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int D\mathbf{x} \mathcal{O}[\mathbf{x}] e^{-S[\mathbf{x}]}$$

($\int D\mathbf{x}$: Integration über alle Pfade $\mathbf{x}(t)$ mit $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_2$).



Pfadintegrale und statistische Physik

- Pfadintegrale (\rightarrow QM Erwartungswerte)

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int D\mathbf{x} \mathcal{O}[\mathbf{x}] e^{-S[\mathbf{x}]}$$

haben die gleiche Struktur wie Zustandssummen (\rightarrow statistische Erwartungswerte bei Temperatur $T = 1/\beta$):

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\beta} = \frac{1}{Z} \sum_n \mathcal{O}_n e^{-\beta E_n} \quad , \quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n}.$$

- Statt über QM Zustände $|n\rangle$ wird über klassische Pfade $\mathbf{x}(t)$ summiert; diese werden nicht mit dem Boltzmann-Faktor $e^{-\beta E_n}$ sondern mit $e^{-S[\mathbf{x}]}$ gewichtet:

$$\sum_n \rightarrow \int D\mathbf{x} \quad , \quad \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}[\mathbf{x}] \quad , \quad e^{-\beta E_n} \rightarrow e^{-S[\mathbf{x}]}.$$

Pfadintegrale in der QFT

- Vorteil von Pfadintegralen: Problemlos auf QFTs übertragbar.
- In dieser Arbeit: SU(2)-Yang- Mills-Theorie (zweifarbige QCD mit unendlich schweren Quarks),

$$S[A] = \frac{1}{4g^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad , \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

(A_μ^a : Eichfeld; $F_{\mu\nu}^a$: Feldstärketensor; g : Kopplungskonstante).

- QFT Erwartungswert einer Observablen \mathcal{O} :

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int DA \mathcal{O}[A] e^{-S[A]}$$

($\int DA$: Integration über alle Eichfeldkonfigurationen $A_\mu^a(x)$).

Was ist der PT-Formalismus?

PT = Pseudoteilchen

- Zentrale Fragestellung: Welche Feldkonfigurationen im SU(2)-Yang-Mills-Pfadintegral sind verantwortlich für Confinement?
- Entwicklung des Pseudoteilchen-Formalismus:
 - Eine numerische Technik um SU(2)-Yang-Mills-Pfadintegrale zu approximieren:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int DA \mathcal{O}[A] e^{-S[A]}.$$

- Ein Werkzeug, um die Wichtigkeit verschiedener Klassen von Eichfeldkonfigurationen in Bezug auf Confinement festzustellen.
- Ein Hilfsmittel, um eine bessere Vorstellung und ein besseres Verständnis vom Yang-Mills Pfadintegral zu bekommen.

Grundprinzip des PT-Formalismus

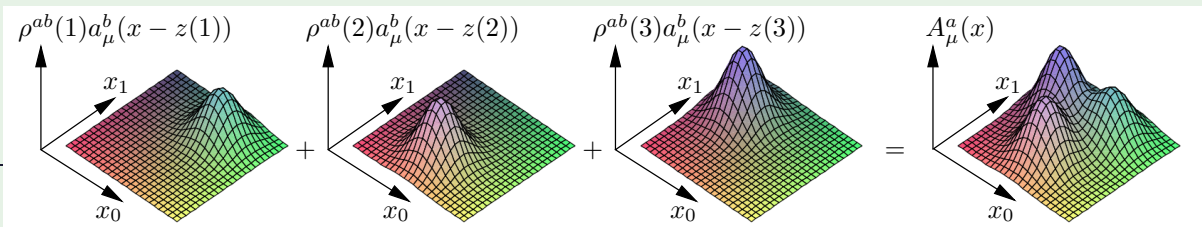
- PT: Eine in Raum und Zeit lokalisierte Eichfeldkonfiguration a_μ^a .
- Einschränken des Pfadintegrals auf diejenigen Eichfeldkonfigurationen, die als Summe einer festen Anzahl (≈ 400) von PTs geschrieben werden können:

$$A_\mu^a(x) = \sum_i \rho^{ab}(i) a_\mu^b(x - z(i))$$

(i : PT-Index; $\rho^{ab}(i)$: Freiheitsgrade des i -ten PTs, z.B. Amplitude und Farbausrichtung; $z(i)$: Position des i -ten PTs).

- Ersetzen der Integration über alle Pfade durch eine Integration über PT-Freiheitsgrade:

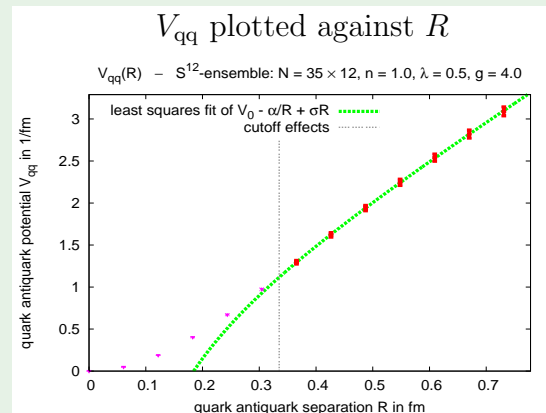
$$\int DA \dots \rightarrow \int \left(\prod_i d\rho^{ab}(i) \right) \dots$$



Test des PT-Formalismus (1)

- Notwendige Voraussetzung: Bei geeigneter Wahl der PTs reproduziert der PT-Formalismus wesentliche Eigenschaften der SU(2)-Yang-Mills-Theorie (Vergleich mit Gitterrechnungen).
- Geeignete Wahl der PTs: "PTs bilden eine Basis aller Eichfeldkonfigurationen; alle Eichfeldkonfigurationen können näherungsweise dargestellt werden."
- **Statisches Quark-Antiquark-Potential** (Potential zwischen zwei unendlich schweren Quarks):

– Linear für große Abstände.

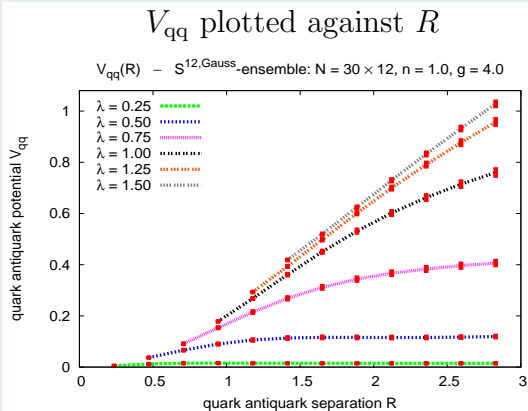


Test des PT-Formalismus (2)

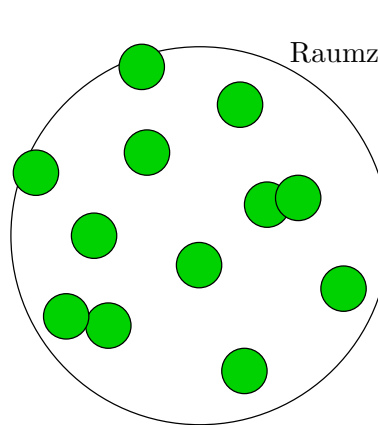
- **Topologische Suszeptibilität** (Maß für die Stärke der Fluktuationen der topologischen Ladung):
 - Die topologische Suszeptibilität “entspricht” der Masse des η' -Mesons.
 - Qualitative Übereinstimmung des PT-Ergebnisses mit Gitterergebnissen.
- **Kritische Temperatur des Confinement-Deconfinement-Phasenübergangs:**
 - Niedrige Temperaturen: Quark-Confinement.
 - Hohe Temperaturen: Isolierte Quarks, kein Confinement.
 - Temperatur des Phasenübergangs wird als kritische Temperatur bezeichnet.
 - Qualitative Übereinstimmung des PT-Ergebnisses mit Gitterergebnissen.

PT-Reichweite und Confinement

- Kurzreichweitige PTs (geringer Überlapp zu benachbarten PTs)
→ Kein Confinement.
- Langreichweitige PTs (starker Überlapp zu benachbarten PTs, "Percolation")
→ Confinement.
- Schlussfolgerung: **Typische Yang-Mills-Eichfeldkonfigurationen besitzen ausgedehnte Strukturen und Anregungen. Diese sind notwendig für Confinement.**

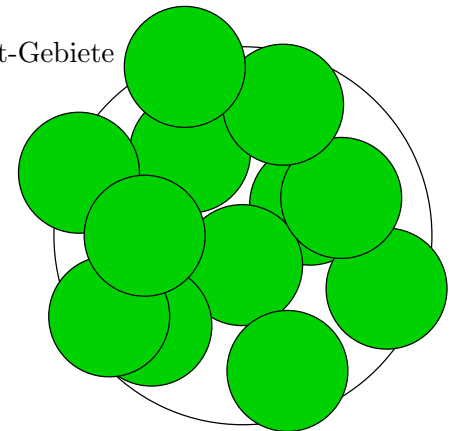


kein Confinement



Raumzeit-Gebiete

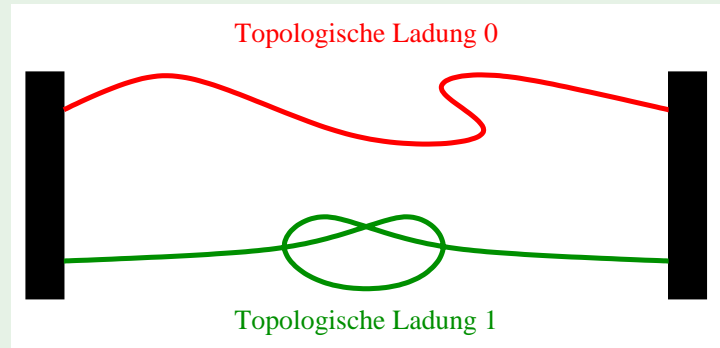
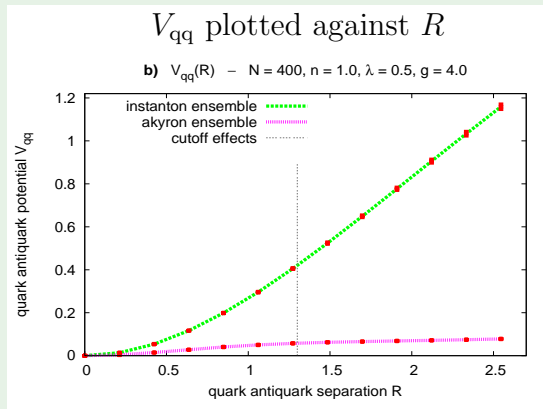
Confinement



PTs (Bereiche mit nicht-verschwindendem Gluonen-Feld)

Topologische Ladung und Confinement

- Verschwindende Topologische Ladungsdichte
→ Kein Confinement.
- Topologische Ladung
→ Confinement.
- Schlussfolgerung: **Typische Yang-Mills-Eichfeldkonfigurationen sind topologisch nicht-trivial.** Diese topologischen Anregungen sind notwendig für **Confinement**.



Zusammenfassung

- Der PT-Formalismus ist eine erfolgreiche effektive Theorie zur numerischen Berechnung von $SU(2)$ -Yang-Mills-Pfadintegralen:
 - Statisches Quark-Antiquark-Potential linear für große Abstände.
 - Topologische Suszeptibilität (Masse des η' -Mesons) und kritische Temperatur (Confinement-Deconfinement-Phasenübergang) in qualitativer Übereinstimmung mit Gitterergebnissen.
- Eigenschaften von Confinement-bewirkenden Eichfeldkonfigurationen:
 - Typische Confinement-bewirkende Eichfeldkonfigurationen besitzen ausgedehnte Strukturen und Anregungen.
 - Typische Confinement-bewirkende Eichfeldkonfigurationen sind topologisch nicht-trivial.

Ausblick

- Berechnung weiterer Observablen:
 - Temperatur Null: Glueball-Massen.
 - Endliche Temperatur: Energiedichte, Druck, Quark-Antiquark-Potential.
- Erweiterung auf dynamische Quarks (Quarks mit endlicher Masse).