Eichsymmetrien in der klassischen Elektrodynamik

Marc Wagner

Goethe-Universität Frankfurt am Main, Institut für Theoretische Physik

mwagner@th.physik.uni-frankfurt.de

http://th.physik.uni-frankfurt.de/∼mwagner/

April 29, 2013

Einleitung

- *... Direkt im Anschluss daran soll eine 10–15 minütige Lehrprobe zu einem vorgegebenen Thema, nämlich "Eichsymmetrien in der klassischen Elektrodynamik" stattfinden. ...*
- Eine gute Vorlesung sollte die Zuhörer fordern (und damit neues Wissen vermitteln), aber nicht überfordern. Die folgende Lehrprobe richtet sich etwa an Bachelor-Studenten des vierten bis sechsten Semesters, könnte zum Beispiel Teil der an der JGU Mainz angebotenen Veranstaltung "Theoretische Physik 5, Klassische Feldtheorie" (empfohlen im 6. Semester) sein.
- Im Folgenden drei Aspekte:

  (1) **Eichsymmetrie in der Elektrodynamik**
  $\longrightarrow$ ausführlich.

  (2) **Ausnutzen der Eichsymmetrie: Eichfixierung, Lösen der BGls**
  $\longrightarrow$ ausführlich.

  (3) **Eichprinzip: Konstruktion/"Herleitung" der Elektrodynamik**
  $\longrightarrow$ lediglich ein kurzer Ausblick.

Klassische ED (Wiederholung)

- Der Inhalt dieser Folie wird als bekannt vorausgesetzt, könnte z.B. eine kurze Wiederholung der letzten Vorlesungsstunde sein ...
- Freiheitsgrade des elektromagnetischen Felds (bei relativistisch kovarianter Formulierung): **Viererpotential** $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ (beschreibt Photonen).
- **Feldstärketensor**, **E-Felder** und **B-Felder**:

$$F_{\mu\nu} \quad = \quad \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad , \quad F_{\mu\nu} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ -E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix} .$$

- **Wirkung** und **Bewegungsgleichungen** (inhomogene Maxwell-Gleichungen):

$$S \quad = \quad \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A^\mu j_\mu \right) \quad = \quad \int d^4x \left(\frac{1}{2} \left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \right) - A^\mu j_\mu \right)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \quad = \quad j^\nu \qquad \leftrightarrow \qquad \mathrm{div}(\mathbf{E}) \quad = \quad \rho \quad , \quad \mathrm{rot}(\mathbf{B}) - \frac{d}{dt}\mathbf{E} \quad = \quad \mathbf{j},$$

($j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$: Viererstrom der Ladungsträger, z.B. Elektronen, Positronen).

Eichsymmetrie in der ED

- **Eichtransformation**: Transformation des Viererpotentials

$$A_\mu(x) \quad \rightarrow \quad A'_\mu(x) \quad = \quad A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda(x)$$

($\Lambda(x)$ ist eine beliebige Funktion der Raumzeit); lässt physikalische Observablen, insbesondere E- und B-Felder invariant,

$$F'_{\mu\nu} \quad = \quad \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \quad = \quad \partial_\mu \Big(A_\nu - \frac{1}{e}\partial_\nu \Lambda\Big) - \partial_\nu \Big(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda\Big) \quad =$$
$$= \quad \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad = \quad F_{\mu\nu}.$$

(A_μ ist nicht messbar, A_μ und A'_μ beschreiben die gleiche Physik).

- Die Wirkung S verändert sich unter Eichtransformationen nur um eine A_μ-unabhängige Konstante, die Bewegungsgleichungen sind invariant ($\rightarrow$ Symmetrietransformation):

$$S' \quad = \quad \int d^4x \, \Big(-\frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} - A'^\mu j_\mu \Big) \quad = \quad S + \textrm{const}$$
$$\partial_\mu F'^{\mu\nu} \quad = \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} \quad = \quad j^\nu.$$

Eichfixierung / Lösen der BGls (1)

- Eichsymmetrie gut? ... Schlecht? ... Bedeutungslos? ...
- Geschicktes Ausnutzen der Eichsymmetrie in Form einer Eichfixierung kann Rechnungen erheblich vereinfachen (Analogie: Geschickte Koordinatenwahl in der Mechanik, z.B. Kugelkoordinaten bei sphärisch symmetrischem V).
- Einfaches Beispiel: Lösen der Maxwell-Gleichungen im Vakuum ($j^\mu = 0$),

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \quad = \quad \partial_\mu \Big(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\Big) \quad = \quad 0 \quad , \quad \nu = 0, 1, 2, 3;$$

  Schwierigkeit: **Die vier Gleichungen ($j = 0, 1, 2, 3$) sind gekoppelt!**

- Nutze die Eichsymmetrie, um die zulässigen Viererpotentiale A_μ einzuschränken und die Maxwell-Gleichungen damit zu entkoppeln; fordere

$$\partial_\mu A^\mu \quad = \quad 0 \quad \text{(Eichfixierung, Lorenz-Eichung)}$$

  (eine zusätzliche Bedingung an A_μ, keine Einschränkung physikalischer Größen, wie z.B. E- und B-Felder).

Eichfixierung / Lösen der BGls (2)

- Die zu lösenden Bewegungsgleichungen entkoppeln und vereinfachen sich aufgrund der Eichfixierung $\partial_\mu A^\mu = 0$ erheblich,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \quad = \quad \partial_\mu\Big(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\Big) \quad = \quad \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{=0} \quad =$$

$$= \quad \Big(\partial_t^2 - \nabla^2\Big) A^\nu \quad = \quad 0;$$

es verbleiben vier unabhängige Wellengleichungen.

- Die allgemeine Lösung ist eine lineare Superposition ebener Wellen,

$$A^\mu \quad = \quad \int d^3k \sum_{\lambda=0,1,2,3} \epsilon^\mu(\lambda, \mathbf{k}) \Big(a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-i(E(k)t - \mathbf{k}\mathbf{x})} + a_\lambda^*(\mathbf{k}) e^{+i(E(k)t - \mathbf{k}\mathbf{x})}\Big),$$

wobei $E(k) = |\mathbf{k}|$ (Dispersionsbeziehung für Photonen) und ϵ^μ vier orthogonale Richtungsvektoren sind.

Eichfixierung / Lösen der BGls (3)

- Die Eichfixierung $\partial_\mu A^\mu = 0$ führt auf

$$k_\mu \epsilon^\mu(\lambda, \mathbf{k}) \quad = \quad 0$$

(die vier Komponenten A_μ werden dadurch wieder gekoppelt)
$\longrightarrow$ drei einfach hinzuschreibende Lösungen $\epsilon^\mu(\lambda, \mathbf{k}) = 0$, $\lambda = 1, 2, 3$, z.B. für
$\mathbf{k} = (p > 0, 0, 0)$
$\longrightarrow k^\mu = (p, p, 0, 0)$
$\longrightarrow \epsilon^\mu(1, \mathbf{k}) = (+1/\sqrt{2}, +1/\sqrt{2}, 0, 0)$,
$\epsilon^\mu(2, \mathbf{k}) = (0, 0, 1, 0)$,
$\epsilon^\mu(3, \mathbf{k}) = (0, 0, 0, 1)$.

- Endergebnis:

$$A^\mu \quad = \quad \int d^3k \sum_{\lambda=1,2,3} \epsilon^\mu(\lambda, \mathbf{k}) \Big(a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-i(E(k)t - \mathbf{k}\mathbf{x})} + a^*_\lambda(\mathbf{k}) e^{+i(E(k)t - \mathbf{k}\mathbf{x})} \Big).$$

Eichprinzip (1)

- Bisher: Eichsymmetrie als mathematisches Hilfsmittel, um ein Problem (die Lösung der Maxwell-Gleichungen) zu vereinfachen.
- Der Eichsymmetrie kommt in Form des Eichprinzips eine wesentlich tiefere Bedeutung zu.
- Eichprinzip (ermöglicht die Konstruktion z.B. der Elektrodynamik):

  (1) Starte mit freien (d.h. nicht-WW) Elektronen und Positronen
  $\longrightarrow$ Theorie besitzt keine Eichsymmetrie.

  (2) Fordere die Existenz der Eichsymmetrie; erweitere/modifiziere die freie Theorie in minimaler Weise, so dass Eichsymmetrie vorliegt
  $\longrightarrow$ Ein neues Vektorfeld A_μ entsteht, die erweiterte eichsymmetrische Theorie ist gerade die Elektrodynamik.

Eichprinzip (2)

- Analog können mit Hilfe des Eichprinzips auch die den anderen fundamentalen Kräften entsprechenden Theorien konstruiert werden:
  - Starte mit freien Quarks (drei identischen Teilchensorten [r,g,b]) $\stackrel{\text{Eichprinzip}}{\longrightarrow}$ starke WW, QCD.
  - Starte mit zwei identischen Teilchensorten $\stackrel{\text{Eichprinzip}}{\longrightarrow}$ schwache WW.
  - Fordere "Eichsymmetrie" bezüglich beliebiger Koordinatentransformationen $\longrightarrow$ Gravitation, ART.
- **Das Eichprinzip ist eines der mächtigsten Prinzipien der Physik, die zugehörige Eichsymmetrie eine der wichtigsten Symmetrien unserer fundamentalen Theorien.**