

Fermionische Felder im Pseudoteilchen-Formalismus

Marc Wagner

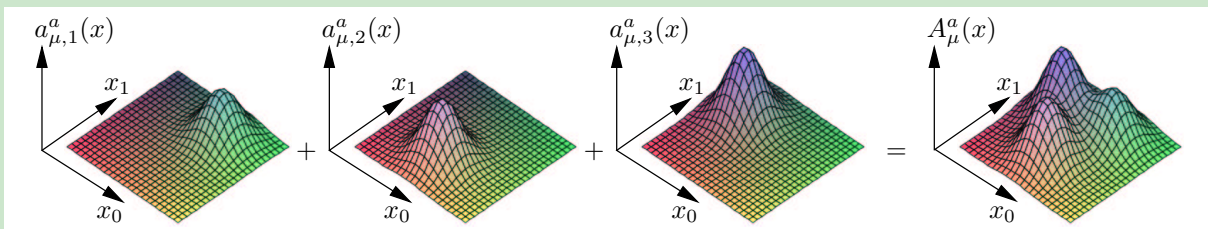
mcwagner@theorie3.physik.uni-erlangen.de

<http://theorie3.physik.uni-erlangen.de/~mcwagner>

29. März 2007

Motivation (1)

- Modelle für SU(2)-Yang-Mills-Theorie mit wenigen Freiheitsgraden:
 - Reguläre Instanton-Modelle und Meron-Modelle (F. Lenz, J. W. Negele, M. Thies, 2003).
 - Pseudoteilchen-Formalismus (F. Lenz, M.W., 2005).
 - Caloronen mit nicht-trivialer Holonomie (P. Gerhold, E.-M. Ilgenfritz, M. Müller-Preussker, 2006).
- Grundprinzip dieser Modelle: Beschränke das Pfadintegral auf diejenigen Eichfeldkonfigurationen, die als Summe einer kleinen Anzahl von lokalisierten Bausteinen (Instantone, Meronen, Akyronen, Caloronen, ...) dargestellt werden können.



Motivation (2)

- Wesentliche Erfolge dieser Modelle:
 - Lineares Potential zwischen zwei statischen Ladungen bei großen Abständen (Confinement).
 - Confinement-Deconfinement-Phasenübergang.
 - Stringspannung, topologische Suszeptibilität und kritische Temperatur in qualitativer Übereinstimmung mit Gitterergebnissen.
- Zielsetzung dieser Modelle: Besseres Verständnis von Confinement (Welche Eichfeldkonfigurationen sind verantwortlich für Confinement?).
- **Wie können Fermionen in diese Modelle integriert werden?**
- Erste Schritte in diese Richtung in diesem Vortrag:
 - Grundprinzip des PT-Formalismus in fermionischen Theorien.
 - Test: Anwendung auf das 1+1-dimensionale Gross-Neveu-Modell im Large- N -Limes (Phasen-Diagramm, chirales Kondensat).

Das Gross-Neveu-Modell (1)

- Wirkung und Zustandssumme des 1+1-dimensionalen Gross-Neveu-Modells:

$$S = \int d^2x \left(\sum_{n=1}^N \bar{\psi}^{(n)} \left(\gamma_0(\partial_0 + \mu) + \gamma_1 \partial_1 \right) \psi^{(n)} - \frac{g^2}{2} \left(\sum_{n=1}^N \bar{\psi}^{(n)} \psi^{(n)} \right)^2 \right)$$

$$Z = \int \left(\prod_{n=1}^N D\psi^{(n)} D\bar{\psi}^{(n)} \right) e^{-S}$$

(N : Anzahl der Flavors; μ : Chemisches Potential; g : Kopplungskonstante).

- Führe ein reelles Skalarfeld ein, $\sigma = \sum_{n=1}^N \bar{\psi}^{(n)} \psi^{(n)}$ (chirales Kondensat):

$$S' = \int d^2x \left(\frac{1}{2g^2} \sigma^2 + \sum_{n=1}^N \bar{\psi}^{(n)} \left(\gamma_0(\partial_0 + \mu) + \gamma_1 \partial_1 + \sigma \right) \psi^{(n)} \right)$$

$$Z \propto \int \left(\prod_{n=1}^N D\psi^{(n)} D\bar{\psi}^{(n)} \right) \int D\sigma e^{-S'}$$

Das Gross-Neveu-Modell (2)

- Integriere fermionische Felder aus:

$$\frac{S_{\text{effective}}}{N} = \frac{1}{2\lambda} \int d^2x \sigma^2 - \ln \left(\det \underbrace{\left(\gamma_0(\partial_0 + \mu) + \gamma_1 \partial_1 + \sigma \right)}_{=Q \quad (\text{Dirac-Operator})} \right)$$

$$Z \propto \int D\sigma e^{-S_{\text{effective}}}$$

$$(\lambda = Ng^2).$$

- Large- N -Limit:
 - $N \rightarrow \infty$, $\lambda = Ng^2 = \text{constant}$.
 - Das σ -Pfadintegral muss nicht berechnet werden. Auf Grund von $N \rightarrow \infty$ reicht es aus, $S_{\text{effective}}$ bezüglich σ zu minimieren.

Grundprinzip, PTs und Fermionen

- Betrachte diejenigen fermionischen Feldkonfigurationen, die als Summe einer festen Anzahl von lokalisierten Bausteinen (PTs) dargestellt werden können:

$$\psi^{(n)}(x) = \sum_j \underbrace{\phi_j^{(n)} G_j(x)}_{j\text{-tes PT}}, \quad \int D\psi^{(n)} D\bar{\psi}^{(n)} \dots = \int \left(\prod_j d\phi_j^{(n)} d\bar{\phi}_j^{(n)} \right) \dots$$

($\phi_j^{(n)}$): Grassmann-wertige Spinoren; G_j : lokalisierte Funktionen).

- Periodisches Raumzeit-Gebiet, Ausdehnung $L_0 \times L_1$; antiperiodische Randbedingungen für $\psi^{(n)}$ in x_0 -Richtung, d.h. $G_j(x + L_0) = -G_j(x)$.
- PT effektive Wirkung des Gross-Neveu-Modells für $\sigma = \text{constant}$:

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{effective}}}{N} &= \frac{L_0 L_1 \sigma^2}{2\lambda} - \ln \left(\det \left(\langle G_j | Q_{ss'} | G_{j'} \rangle \right) \right) \\ \langle G_j | Q_{ss'} | G_{j'} \rangle &= \\ &= \int d^2x G_j^*(x) \left((\gamma_0)_{ss'} (\partial_0 + \mu) + (\gamma_1)_{ss'} \partial_1 + (1)_{ss'} \sigma \right) G_{j'}(x). \end{aligned}$$

Vorübung: Ebene Wellen als “PTs” (1)

- Ebene Wellen als PTs:

$$G_{j_0, j_1}(x_0, x_1) = \frac{1}{\sqrt{L_0 L_1}} \exp\left(i\left(k_0(j_0)x_0 + k_1(j_1)x_1\right)\right) ,$$
$$k_0(j_0) = \frac{2\pi(j_0 + 1/2)}{L_0} , \quad k_1(j_1) = \frac{2\pi j_1}{L_1}$$

mit $j_0 = -N_0, \dots, +N_0 - 1$ und $j_1 = -N_0, \dots, +N_1$.

- **Ebene Wellen sind Eigenfunktionen des Dirac-Operators:**

$$\underbrace{\left(\gamma_0(\partial_0 + \mu) + \gamma_1\partial_1 + \sigma\right)}_{=Q \quad (\text{Dirac-Operator})} \mathbf{v}_{j_0, j_1} G_{j_0, j_1} = \alpha_{j_0, j_1} \mathbf{v}_{j_0, j_1} G_{j_0, j_1} .$$

Damit gilt

$$\ln\left(\det\left(\langle G_{j_0, j_1} | Q_{ss'} | G_{j'_0, j'_1} \rangle\right)\right) = \ln\left(\prod_{j_0, j_1} \alpha_{j_0, j_1}\right) .$$

Vorübung: Ebene Wellen als “PTs” (2)

GN-Phasendiagramm für $\sigma = \text{constant}$ (1)

- Rechnungen bei endlicher Temperatur, $\mu = 0.0$, $L_0 \times L_1 = 20.0 \times 201.0$, ein Freiheitsgrad pro Einheitsvolumen:
 - Chirale Symmetrie bei $\lambda_{\text{critical}} = 0.853$ gebrochen.
- “Temperatur-Null-Rechnungen” bei $\lambda = 0.853$ (d.h. $T_{\text{critical}} = 1.0/20.0$), $\mu = 0.0$, $L_0 \times L_1 = 200.0 \times 201.0$, ein Freiheitsgrad pro Einheitsvolumen:
 - “Temperatur-Null-Wert” des chiralen Kondensates: $\sigma_0 = 0.088$.

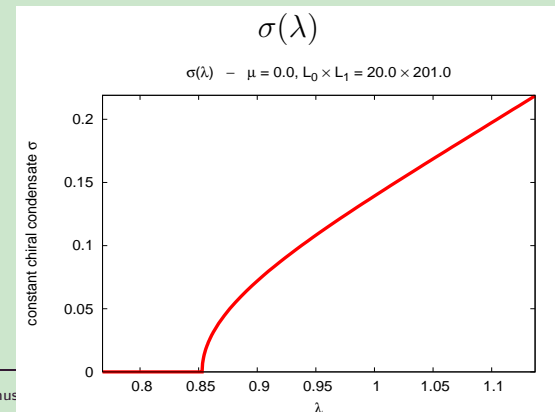
– Das dimensionslose Verhältnis

$$\frac{T_{\text{critical}}}{\sigma_0} = \frac{1}{20.0 \times 0.088} = 0.567$$

stimmt mit dem bekannten Wert

$$T_{\text{critical}}/\sigma_0 = e^{\gamma}/\pi = 0.567 \text{ \u00fcberein}$$

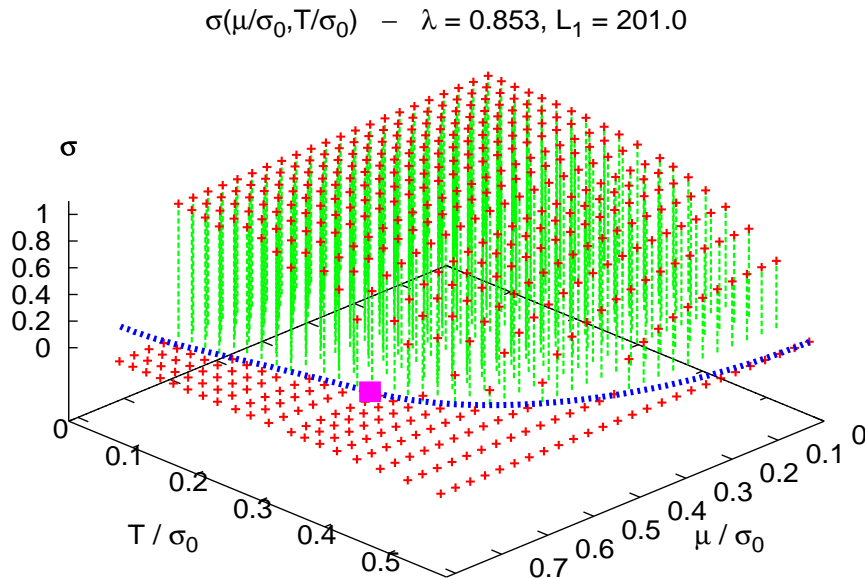
(U. Wolff, 1985).



Vorübung: Ebene Wellen als “PTs” (3)

GN-Phasendiagramm für $\sigma = \text{constant}$ (2)

- Das PT-Phasendiagramm ($\lambda = 0.853$, $L_1 = 201.0$, ein Freiheitsgrad pro Einheitsvolumen) stimmt mit bekannten Ergebnissen überein (U. Wolff, 1985).



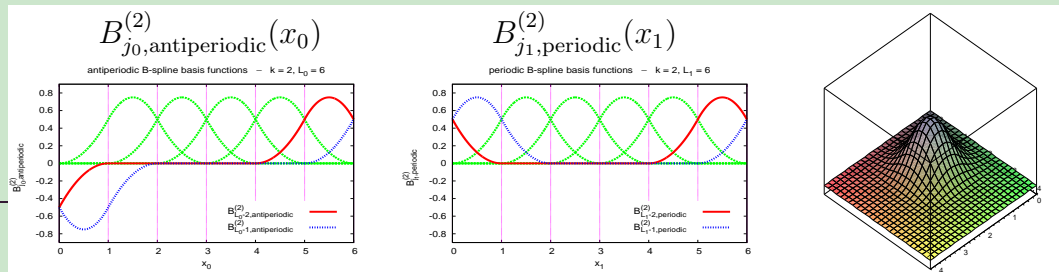
B-Spline-Basis-Funktionen als PTs (1)

- **“Hut-Funktionen”** als PTs (präziser: B-Spline-Basis-Funktionen, Grad 2):

$$G_{j_0, j_1}(x_0, x_1) = B_{j_0, \text{antiperiodic}}^{(2)}(x_0) B_{j_1, \text{periodic}}^{(2)}(x_1)$$

mit $j_0 = 0, \dots, L_0 - 1$ und $j_1 = 0, \dots, L_1 - 1$ (L_0 und L_1 ganzzahlig).

- Warum B-Spline-PTs?
 - **“Vernünftige Menge” von Feldkonfigurationen**
 - **Geeignet für einen Test des PT-Formalismus.**
 - Stückweise Polynome
 - Analytische Integration (Matrizelemente, effektive Wirkung).
 - Nur lokal von Null verschieden
 - Numerisch effizient (dünn besetzte Matrizen, lokale Updates).

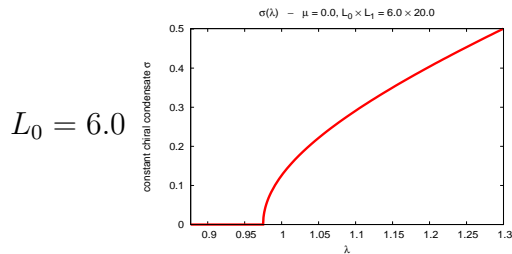


B-Spline-Basis-Funktionen als PTs (2)

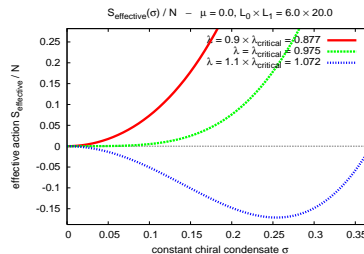
GN-Phasendiagramm für $\sigma = \text{constant}$ (1)

- Rechnungen bei endlicher Temperatur, $\mu = 0.0$:
 - $L_0 \times L_1 = 6.0 \times 20.0$: Chirale Symmetrie bei $\lambda_{\text{critical}} = 0.975$ gebrochen.
 - $L_0 \times L_1 = 7.0 \times 20.0$: **Chirale Symmetrie stets gebrochen!!!**
 - $L_0 \times L_1 = 8.0 \times 20.0$: Chirale Symmetrie bei $\lambda_{\text{critical}} = 0.842$ gebrochen.

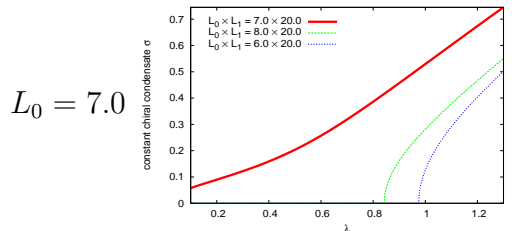
$\sigma(\lambda)$



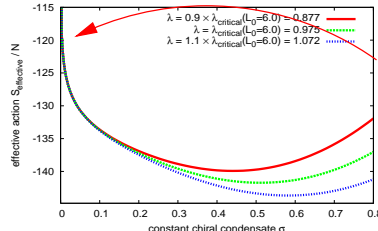
$S_{\text{effective}}(\sigma)$



$\sigma(\lambda) - \mu = 0.0, L_0 \times L_1 = 7.0 \times 20.0$



$S_{\text{effective}}(\sigma) / N - \mu = 0.0, L_0 \times L_1 = 7.0 \times 20.0$



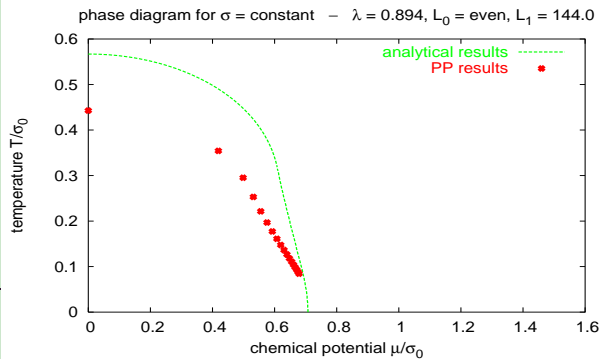
Unphysikalische PT-Nullmoden!!!
 – $-\ln(\det(Q)) \rightarrow \infty$

B-Spline-Basis-Funktionen als PTs (3)

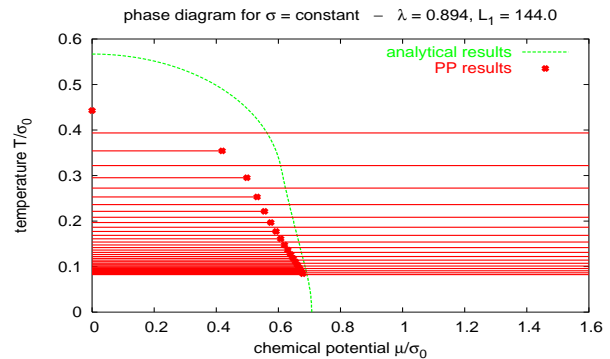
GN-Phasendiagramm für $\sigma = \text{constant}$ (2)

- **Ergebnisse völlig verkehrt und nutzlos!!!**
- Tritt das Problem speziell bei B-Spline-PTs auf?
 - Nein! **Jede Wahl von lokalisierten, reellen und gleichförmig angeordneten PTs führt zum gleichen Problem!!!**
- Hilft es, eine größere Anzahl von PTs zu verwenden?
 - Nein! **Erhöhen der Anzahl der PTs schafft keine Abhilfe!!!**

nur gerade # von PTs in x_0 -Richtung



auch ungerade # von PTs in x_0 -Richtung



Wo liegt das Problem? (1)

Numerische Berechnung von Determinanten (nicht PT-...!) (1)

- Wirkung und Zustandssumme einer Theorie mit quadratischer Fermionenwechselwirkung:

$$S[\psi, \bar{\psi}, \phi] = \int dx \left(\bar{\psi} Q(\phi) \psi + \mathcal{L}(\phi) \right) , \quad Z = \int D\psi D\bar{\psi} D\phi e^{-S[\psi, \bar{\psi}, \phi]}$$

(Q : Dirac-Operator; ϕ : bosonische Felder, z.B. chirales Kondensat).

- Ausintegrieren der Fermionen:

$$S_{\text{effective}}[\phi] = \int dx \left(\mathcal{L}(\phi) - \ln \left(\det(Q(\phi)) \right) \right) , \quad Z \propto \int D\phi e^{-S_{\text{effective}}[\phi]} .$$

- Formal ist $\det(Q)$ das Produkt der (unendlich vielen) Eigenwerte von Q :

$$\det(Q) = \prod_{j=0}^{\infty} \lambda_j , \quad Q\psi_j(x) = \lambda_j\psi_j(x) .$$

Wo liegt das Problem? (2)

Numerische Berechnung von Determinanten (nicht PT-...!) (2)

- Numerisch sind unendlich viele Eigenwerte nicht handhabbar.
- Hoffnung/Annahme: $\det(Q)$ kann durch eine endliche Anzahl von Eigenwerten $\lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}$ (die M niedrigsten) vernünftig approximiert werden:

$$\det(Q) \approx \prod_{j=0}^{M-1} \lambda_j.$$

Wo liegt das Problem? (3)

Problem bei der Determinantenberechnung im PT-Formalismus (1)

- Annahmen: Q hermitesch, PTs G_j orthonormal (keine wesentlichen Einschränkungen).
- Um das Problem aufzuzeigen, ist es von Vorteil die Matrix $\langle G_j|Q|G_{j'}\rangle$ zu diagonalisieren:

$$(U^\dagger)_{jk} \langle G_k|Q|G_{k'}\rangle U_{k'j'} = \langle \tilde{G}_j|Q|\tilde{G}_{j'}\rangle = \left(\text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots) \right)_{jj'}$$

(U : Unitäre Matrix). Damit gilt

$$\det \left(\langle G_j|Q|G_{j'}\rangle \right) = \det \left(\langle \tilde{G}_j|Q|\tilde{G}_{j'}\rangle \right) = \prod_j \mu_j.$$

- Bezeichnung:
 - μ_j : “PT-Eigenwerte von Q ”.
 - λ_j : “Echte Eigenwerte von Q ” ($Q\psi_j(x) = \lambda_j\psi_j(x)$).

Wo liegt das Problem? (4)

Problem bei der Determinantenberechnung im PT-Formalismus (2)

- Das Problem ist nun offensichtlich:
 - $\mu_j = \langle \tilde{G}_j | Q | \tilde{G}_j \rangle$ geht in die PT-Approximation von $\det(Q)$ ein.
 - **Die Anwendung von Q auf \tilde{G}_j kann eine Funktion liefern die (teilweise) außerhalb des PT-Funktionenraumes $\text{span}\{\tilde{G}_k\}$ liegt, d.h.**
$$Q\tilde{G}_j = \mu_j\tilde{G}_j + h_j H_j \quad , \quad H_j \perp \text{span}\{\tilde{G}_k\}.$$
 - $|\mu_j| \gg |h_j|$
 - \tilde{G}_j ist näherungsweise Eigenfunktion von Q
 - **Physikalischer Beitrag $\mu_j \approx \lambda_j$ zur PT-Approximation von $\det(Q)$.**
 - $|\mu_j| \lesssim |h_j|$
 - $h_j H_j$ wird von der Methode grundlos ignoriert
 - \tilde{G}_j ist weit entfernt von jeder Eigenfunktion von Q
 - **Unphysikalischer Beitrag μ_j zur PT-Approximation von $\det(Q)$.**
- Extremfall: $\mu_j = 0$ und $h_j \neq 0$ (unphysikalische PT-Nullmode).

Wo liegt das Problem? (5)

Ein einfaches Beispiel

- Operator $Q = \partial_x$, $0 \leq x < L \in \{7, 8\}$, antiperiodische Randbedingungen.
- Echte Eigenwerte λ_r : $\lambda_r = 2\pi i r / L$, $r = \dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, \dots$
- PT-Eigenwerte μ_r : $\sum_{k'} \langle G_k | \partial_x | G_{k'} \rangle U_{k'j} = \mu_j U_{kj}$.
- PT-Eigenfunktionen \tilde{G}_j :

$$\tilde{G}_j(x) = \sum_k U_{kj} G_k(x) \quad , \quad Q \tilde{G}_j = \mu_j \tilde{G}_j + h_j H_j \quad , \quad H_j \perp \text{span}\{\tilde{G}_k\}.$$

$L = 7$				$L = 8$			
r	λ_r	μ_j	$ h_j $	r	λ_r	μ_j	$ h_j $
1/2	0.449 i	0.449 i	0.004	1/2	0.393 i	$\pm 0.393 i$	0.002
3/2	1.346 i	1.344 i	0.135	3/2	1.178 i	$\pm 1.177 i$	0.083
5/2	2.244 i	2.065 i	1.063	5/2	1.963 i	$\pm 1.909 i$	0.599
7/2	3.142 i	0.000	3.162	7/2	2.749 i	$\pm 1.610 i$	2.441

Loswerden unphysikalischer Moden (1)

Die perfekte Lösung (sehr zeitaufwendig!)

- **Verwende Eigenfunktionen von Q als PTs**
 - $\text{span}\{QG_j\} \subseteq \text{span}\{G_j\}$
 - **Der PT-Funktionenraum wird nicht verlassen (Problem gelöst).**
- Ebene Wellen sind Eigenfunktionen des Gross-Neveu-Dirac-Operators für $\sigma = \text{constant}$
 - Exzellente PT-Ergebnisse für diesen Fall nicht überraschend.
- Eigenfunktionen von Q im Allgemeinen nicht bekannt.
- **Numerisches Bestimmen der Eigenfunktionen von Q ist sehr zeitaufwendig (hängen von den bosonischen Feldern ϕ ab)!!!**
- Mögliche Auswege:
 - Gitterformulierung.
 - Verbesserte PT-Methode.

Loswerden unphysikalischer Moden (2)

Verbesserte PT-Methode

- Annahme: $\det(Q)$ reell und $\det(Q) > 0$.
- Es gilt

$$\det(Q) = \sqrt{\det(Q^\dagger Q)}.$$

- **Wende den PT-Formalismus auf $\sqrt{\det(Q^\dagger Q)}$ statt auf $\det(Q)$ an.**
- PT effektive Wirkung des Gross-Neveu-Modells für $\sigma = \text{constant}$:

$$\frac{S_{\text{effective}}}{N} = \frac{L_0 L_1 \sigma^2}{2\lambda} - \frac{1}{2} \ln \left(\det \left(\langle G_j | (Q^\dagger Q)_{ss'} | G_{j'} \rangle \right) \right)$$
$$\langle G_j | (Q^\dagger Q)_{ss'} | G_{j'} \rangle = \int d^2x G_j^*(x) \left((\gamma_0)_{st} (\partial_0 + \mu) + (\gamma_1)_{st} \partial_1 + (1)_{st} \sigma \right)^\dagger$$
$$\left((\gamma_0)_{ts'} (\partial_0 + \mu) + (\gamma_1)_{ts'} \partial_1 + (1)_{ts'} \sigma \right) G_{j'}(x).$$

Loswerden unphysikalischer Moden (3)

Ein “Plausibilitätsargument” für die verbesserte PT-Methode

- Problem: Anwenden des Dirac-Operators Q auf PTs G_j führt aus dem PT-Funktionenraum $\text{span}\{G_k\}$ heraus.
- Extremfall, unphysikalische PT-Nullmode:

– Eine PT-Nullmode $\tilde{G}_{\text{zero mode}}$ ist keine echte Nullmode.

– $\tilde{G}_{\text{zero mode}}$ trägt zur PT-Approximation von $\det(Q)$ als Nullmode bei.

$$\langle G_j | \underbrace{Q | \tilde{G}_{\text{zero mode}} \rangle}_{\neq 0} = 0 \quad \text{für alle } j.$$

- Vorteil der verbesserten Methode (Verwenden von $\langle G_j | Q^\dagger Q | G_{j'} \rangle$): **Sowohl $\langle G_j | Q^\dagger$ als auch $Q | G_{j'} \rangle$ liegen u.U. außerhalb von $\text{span}\{G_j\}$; ihr Überlapp wird aber im selben Raum berechnet, nämlich $\text{span}\{QG_k\}$.**
- Man kann für die verbesserte PT-Methode zeigen: Jede PT-Nullmode ist notwendiger Weise eine echte Nullmode.

Loswerden unphysikalischer Moden (4)

Ein “ausgefeilteres Argument” für die verbesserte PT-Methode (1)

- Echte Eigenfunktionen und echte Eigenwerte von $Q^\dagger Q$:

$$Q^\dagger Q \psi_n = \lambda_n \psi_n \quad , \quad \lambda_n \geq 0 \quad , \quad |\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq \dots$$

- Annahme: Nur niedrige Eigenwerte hängen von den bosonischen Feldern ϕ ab,

$$\lambda_n = \lambda_n[\phi] \quad , \quad \psi_n = \psi_n(\phi) \quad , \quad n = 0, \dots, M-1$$

$$\lambda_n = \lambda_n[\emptyset] \quad , \quad \psi_n = \psi_n(\emptyset) \quad , \quad n = M, \dots$$

- Bosonische Felder ϕ haben typische Maximalwerte und typische maximale Oszillationen (wegen Regularisierung, z.B. PTs, und $e^{-S_{\text{effective}}}$).
- Hohe Eigenwerte hängen kaum von ϕ ab, da die Ableitung im Dirac-Operator, $\gamma_\mu \partial_\mu$, das “Potential” ϕ dominiert. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind näherungsweise ebene Wellen.
- Niedrigen Eigenwerten (diese hängen von ϕ ab) entsprechen schwach oszillierende Eigenfunktionen.

Loswerden unphysikalischer Moden (5)

Ein “ausgefeilteres Argument” für die verbesserte PT-Methode (2)

- Annahme: PTs sind in der Lage die niedrigen Eigenfunktionen ψ_n , $n = 0, \dots, M - 1$, vernünftig zu approximieren (ist z.B. für B-Spline-PTs der Fall).
- Niedrige PT-Eigenmoden ($j = 0, \dots, M - 1$):

$$\tilde{G}_j(\phi) \approx \psi_j(\phi) \quad , \quad \mu_j[\phi] = \langle \tilde{G}_j(\phi) | Q^\dagger Q | \tilde{G}_j(\phi) \rangle \approx \lambda_j[\phi],$$

d.h. der Beitrag dieser PT-Eigenmoden zur PT-Approximation von $\det(Q)$ ist korrekt.

Loswerden unphysikalischer Moden (6)

Ein “ausgefeilteres Argument” für die verbesserte PT-Methode (3)

- Hohe PT-Eigenmoden ($j = M, \dots$):
 - PT-Eigenfunktionen sind Linearkombinationen der verbleibenden hohen echten Eigenfunktionen:

$$\tilde{G}_j(\Phi) \approx \sum_{n=M}^{\infty} c_n^{(j)}[\Phi] \psi_n(\Phi) \quad , \quad \sum_{n=M}^{\infty} \left| c_n^{(j)}[\Phi] \right|^2 = 1$$

(kein Beitrag von $\psi_0, \dots, \psi_{M-1}$ da die PT-Eigenmoden wegen der Hermitizität von $\langle G_j | Q^\dagger Q | G_{j'} \rangle$ senkrecht aufeinander stehen).

- PT-Eigenwerte:

$$\mu_j[\Phi] = \langle \tilde{G}_j(\Phi) | Q^\dagger Q | \tilde{G}_j(\Phi) \rangle \approx \sum_{n=M}^{\infty} \left| c_n^{(j)}[\Phi] \right|^2 \lambda_n[\Phi] \geq \lambda_M[\Phi]$$

($\lambda_n \geq 0$ wurde verwendet).

Loswerden unphysikalischer Moden (7)

Ein “ausgefeilteres Argument” für die verbesserte PT-Methode (4)

- \tilde{G}_j und μ_j sind näherungsweise unabhängig von ϕ
 - Obwohl der Fehler dieser hohen PT-Eigenwerten u.U. groß ist, bewirkt dieser Fehler lediglich die Addition einer irrelevanten Konstante zu $S_{\text{effective}}$.
- $\mu_j \geq \lambda_M$, d.h. μ_j ist groß und positiv
 - U.U. vorhandene schwache ϕ -Abhängigkeiten von $c_n^{(j)}$ oder λ_n oder schwache Beiträge von niedrigen Eigenwerten haben keinen starken Einfluss auf μ_j . Ihr Beitrag zur PT-Approximation von $\det(Q^\dagger Q)$ ist vernachlässigbar.
- Naive $\det(\langle G_j | Q | G_{j'} \rangle)$ -Methode:
 - * μ_j u.U. sehr klein, da λ_j nicht notwendiger Weise positiv
 - Schwache ϕ -Abhängigkeiten von $c_n^{(j)}$, ... verändern μ_j stark.
 - * ∂_x -Beispiel, $L = 7$: Unphysikalische PT-Nullmode setzt sich aus zwei großen echten Eigenmoden (Eigenwerte $\lambda_\pm = \pm ik$) zusammen.

Loswerden unphysikalischer Moden (8)

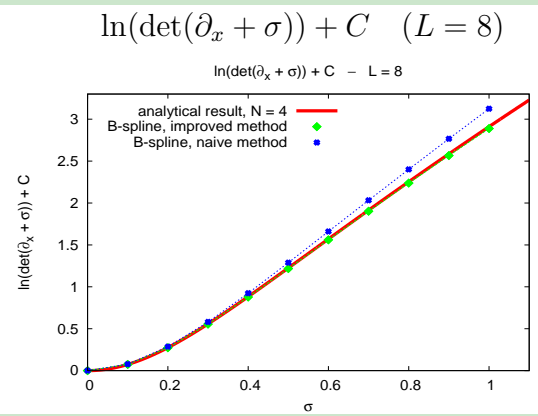
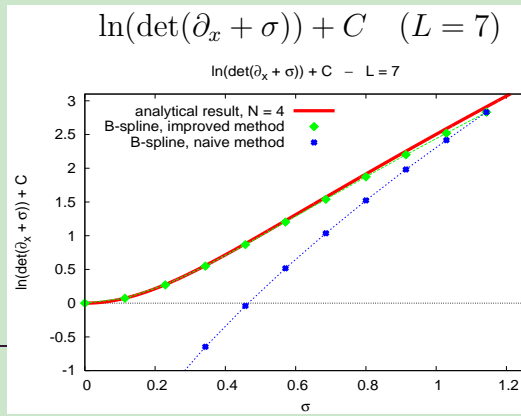
Ein einfaches Beispiel

- Berechne

$$\ln \left(\det \left(\partial_x + \sigma \right) \right) \quad , \quad \sigma = \text{constant} \quad , \quad 0 \leq x < L \in \{7, 8\},$$

antiperiodische Randbedingungen, mit verschiedenen Methoden:

- Analytisch (“Determinante = Produkt der echten Eigenwerte”).
- PT-Formalismus, verbesserte Methode: $\det(Q) \approx \sqrt{\det(\langle G_j | Q^\dagger Q | G_{j'} \rangle)}$.
- PT-Formalismus, naive Methode: $\det(Q) \approx \det(\langle G_j | Q | G_{j'} \rangle)$.

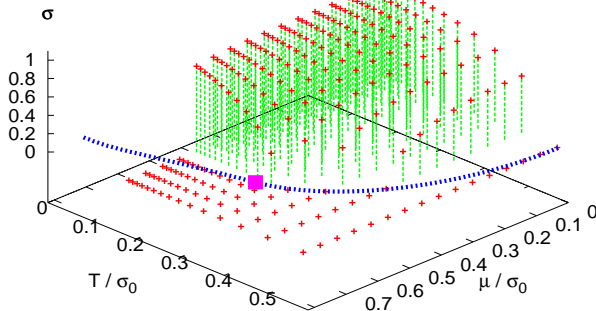


B-Spline-Basis-Funktionen als PTs (4)

GN-Phasendiagramm für $\sigma = \text{constant}$, verbesserte PT-Methode

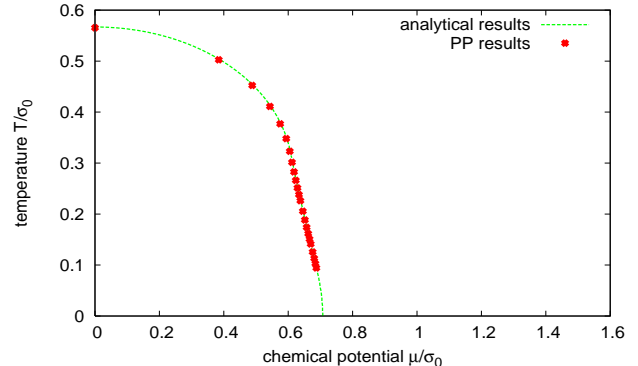
- PT-Phasendiagramme für verschiedene Parametersätze (unterschiedliche PT-Anzahlen; unterschiedliche Werte für die Kopplungskonstante λ) stimmen mit bekannten Ergebnissen überein (U. Wolff, 1985).

$\sigma(\mu/\sigma_0, T/\sigma_0) - \lambda = 1.288, L_1 = 20.0$



gerade und ungerade # von PTs in x_0 -Richtung

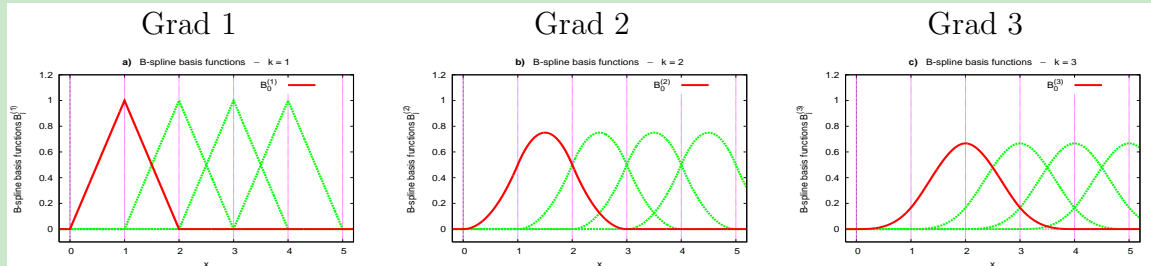
phase diagram for $\sigma = \text{constant} - \lambda = 1.153, L_1 = 144.0$



B-Spline-Basis-Funktionen als PTs (5)

Weitere Ergebnisse im Überblick, B-Spline-PTs, verbesserte Methode (1)

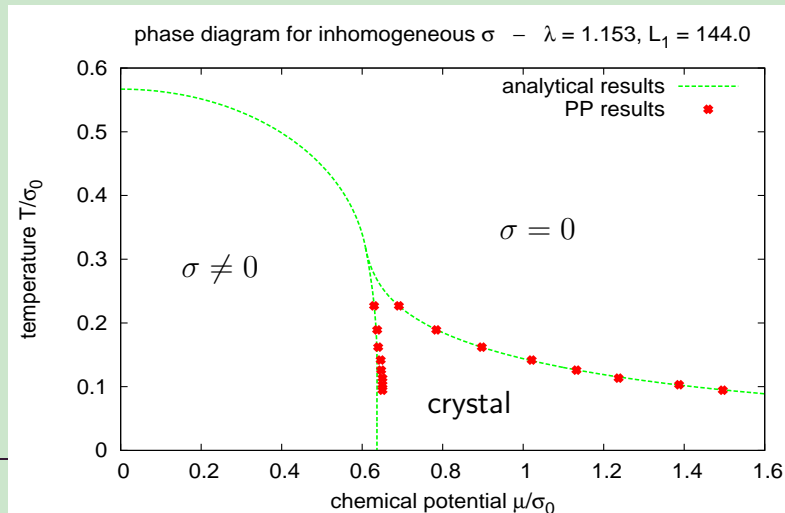
- “Andere Hutfunktionen” (B-Spline Basisfunktionen, Grad 1 und Grad 3)
→ Identische (korrekte) Ergebnisse.



B-Spline-Basis-Funktionen als PTs (6)

Weitere Ergebnisse im Überblick, B-Spline-PTs, verbesserte Methode (2)

- GN-Phasendiagramm für räumlich inhomogenes chirales Kondensat $\sigma = \sigma(x_1)$:
 - PT-Phasendiagramm stimmt im Wesentlichen mit bekannten Ergebnissen überein (O. Schnetz, M. Thies, K. Urlichs, 2004).
 - Minimale Abweichungen auf Grund von Finite-Size-Effekten.



B-Spline-Basis-Funktionen als PTs (7)

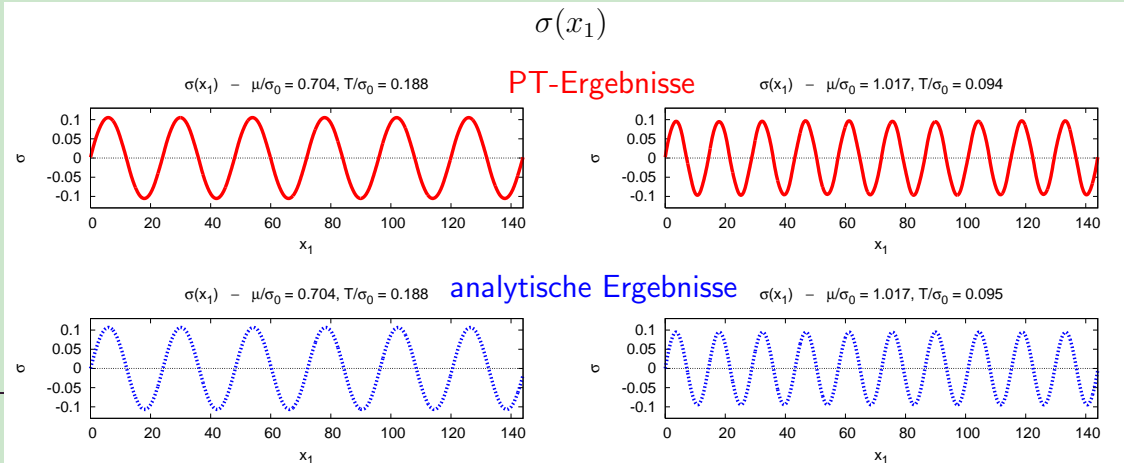
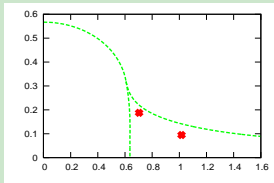
Weitere Ergebnisse im Überblick, B-Spline-PTs, verbesserte Methode (3)

- Chirales Kondensat $\sigma = \sigma(x_1)$ in der Kristallphase:

- Analytisches Ergebnis (O. Schnetz, M. Thies, K. Urlichs, 2004):

$$\sigma(x_1) = A\kappa^2 \frac{\operatorname{sn}(Ax_1, \kappa)\operatorname{cn}(Ax_1, \kappa)}{\operatorname{dn}(Ax_1, \kappa)}.$$

- PT-Ergebnisse und analytische Ergebnisse an zwei willkürlich gewählten $(\mu/\sigma_0, T/\sigma_0)$ -Punkten stimmen überein.



Zusammenfassung und Ausblick

- Verbesserte PT-Methode: **Verwende $\sqrt{\det(Q^\dagger Q)}$ an Stelle von $\det(Q)$ in der effektiven Wirkung.**
- Der PT-Formalismus wurde erfolgreich auf eine fermionische Theorie angewendet, das 1+1-dimensionale Gross-Neveu-Modell im Large- N -Limes: Ergebnisse stimmen mit bekannten Ergebnissen überein.
- Nächster Schritt, Anwendung des PT-Formalismus auf QCD:
 - Momentan (Ch. Szasz): Untersuchen der chiralen Symmetrie(brechung) im PT-Formalismus (ebene Wellen als “PTs”) durch Bestimmen der niedrigen Eigenwerte des Dirac-Operators in der Quenched-Approximation (Banks-Casher-Formel).
 - Fernziel: Ein Modell für QCD mit einer kleinen Anzahl von Freiheitsgraden, das sowohl chirale Symmetriebrechung als auch einen Confinement-Deconfinement-Phasenübergang zeigt.
 - Und dann? ... (leichte) Pion-Massen, Zerfallskonstanten ...