

B-Physik und Gittereichtheorie

Habilitandenkolloquium – Humboldt-Universität zu Berlin

Marc Wagner

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik

Theorie der Elementarteilchen – Phänomenologie/Gittereichtheorie

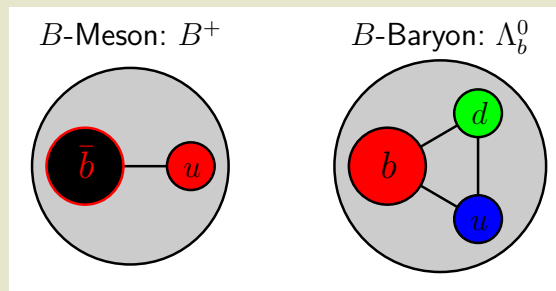
mcwagner@physik.hu-berlin.de

<http://people.physik.hu-berlin.de/~mcwagner/>

November 10, 2009

Einführung

- ***B*-Physik**: Studium von Mesonen (gebundene Quark-Antiquark-Paare) und Baryonen (Systeme bestehend aus drei Quarks), die mindestens ein schweres “bottom” oder “*b*” Quark enthalten.
- Kräfte zwischen Quarks werden im Wesentlichen durch Gluonen vermittelt (starke Wechselwirkung). Die zugrunde liegende Theorie ist die **QCD** (**Quantenchromodynamik**).
- Die “Gleichungen” der QCD sind analytisch nur näherungsweise lösbar
→ Exakte Lösungen dieser Gleichungen mit Hilfe numerischer Methoden, der **Gittereichtheorie**.



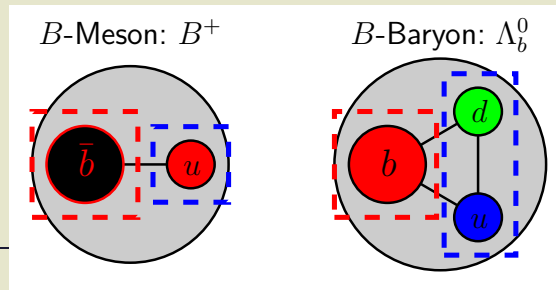
Gliederung

- QCD.
- B -Physik.
- Gittereichtheorie.
- Anwendung der Gittereichtheorie auf B -Physik.
- Berechnung von experimentell messbaren Größen mit Hilfe der Gittereichtheorie:
 - Massen von B -Mesonen.
 - Semileptonische Zerfälle $B \rightarrow D^{**}$.

QCD (Quantenchromodynamik) (1)

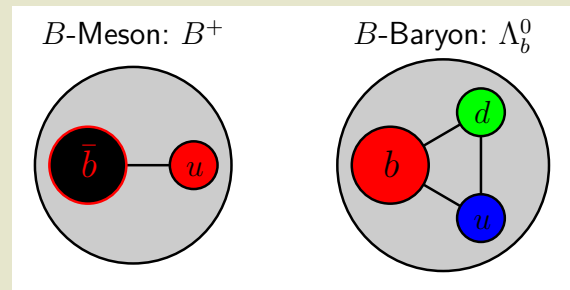
- Die QCD beschreibt die Kraft zwischen Quarks (Fermionen, Spin 1/2, sechs Flavors unterschiedlicher Masse) und Gluonen (Bosonen, Spin 1).

Quark	Masse in MeV/c^2	elektrische Ladung
up	1.5 ... 3.3	$+2/3e$
down	3.5 ... 6	$-1/3e$
strange	$104 + 26/ - 34$	$-1/3e$
charm	$1270 + 70/ - 11$	$+2/3e$
bottom	$4200 + 170/ - 70$	$-1/3e$
top	170900 ± 1800	$+2/3e$



B -Physik

- Entdeckung des b Quark 1977
→ Relativ junges Teilgebiet der Elementarteilchenphysik.
- Fragestellungen: Eigenschaften von B -Mesonen und B -Baryonen, Untersuchung ihrer Zerfälle, damit eng Verknüpft \mathcal{CP} -Verletzung, CKM-Matrixelemente, ...
- Experimente:
 - BaBar Experiment, SLAC (USA).
 - Belle Experiment, KEK (Japan).
 - LHCb Experiment, CERN (Schweiz).
 - ...
- Theoretische Aspekte:
 - (–) Zustände relativ schwer, geringe Energielücken zu angeregten Zuständen.
 - (+) Zusätzliche Symmetrien (Spin, Flavor).



QCD (Quantenchromodynamik) (2)

- Eichtheorie mit Eichgruppe SU(3) und Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \sum_{f \in \{u,d,s,c,t,b\}} \bar{\psi}^{(f)} \left(i\gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu) - m_f \right) \psi^{(f)} - \frac{1}{2} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu].$$

- Struktur, i.B. Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ ähnlich zur Elektrodynamik.
- **Aber: A_μ und $F_{\mu\nu}$ sind 3×3 -Matrizen:**
 - * Gluonen tragen (im Gegensatz zu Photonen) selbst (Farb-)Ladung und wirken Kräfte aufeinander aus
→ Confinement (Quarks können nicht isoliert beobachtet werden).
 - * Auf natürliche Weise (Eichprinzip) entsteht ein “Kommutatorterm” $[A_\mu, A_\nu]$ im Feldstärketensor
→ Nichtlineare Bewegungsgleichungen
→ QCD analytisch exakt unlösbar.
- Quark-Flavors unterscheiden sich nur durch ihre Masse m_f .

QCD (Quantenchromodynamik) (3)

- Lösungsansätze:
 - **Störungstheorie:**
 - * Präzise Vorhersagen, allerdings nur bei hochenergetischen Prozessen anwendbar.
 - * Basiert auf asymptotischer Freiheit (starke Wechselwirkung wird schwach bei hohen Energien).
 - * Massen von z.B. B -Mesonen und B -Baryonen können nicht berechnet werden.
 - **Modellrechnungen:**
 - * Quarkmodelle.
 - * Effektive Theorien (Chirale Störungstheorie, ...).
 - * Modelle basierend auf topologischen Objekten (Instantone, ...).
 - * AdS-CFT, AdS-QCD, ...
 - * Wichtig für qualitatives Verständnis aber mit unbekanntem systematischen Fehlern behaftet.

QCD (Quantenchromodynamik) (4)

- Lösungsansätze:
 - **Gittereichtheorie:**
 - * Numerische “exakte” Berechnung von QCD-Observablen (exakt \equiv kontrollierbare systematische Fehler).
 - * Auch auf niederenergetische Prozesse anwendbar.
 - * Anwendungsgebiete/Ziele:
 - Verifikation oder Falsifikation der QCD (“Suche nach neuer Physik”).
 - Vorhersagen durch Berechnung von experimentell schwer zugänglichen Observablen.
 - Qualitatives Verständnis (Vakuumstruktur, ...).

Gittereichtheorie (1)

- Ausgangspunkt ist der Pfadintegralformalismus:
 - Direkte Übertragbarkeit von Quantenmechanik auf Quantenfeldtheorie.
 - Geeignet zur numerischen Umsetzung.

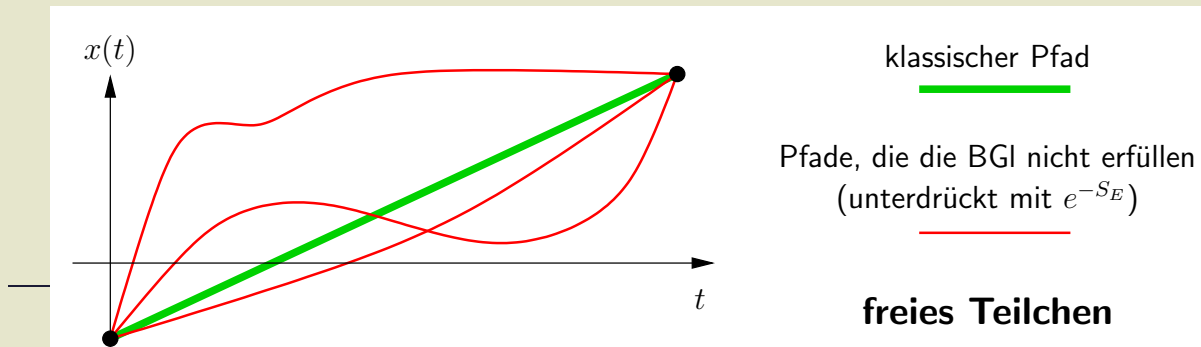
Gittertheorie (2)

- Ausgangspunkt ist der Pfadintegralformalismus:

– Quantenmechanik:

$$\langle \Omega | \mathcal{O}(\mathbf{x}) | \Omega \rangle = \int D\mathbf{x} \mathcal{O}(\mathbf{x}) e^{-S_E} , \quad S_E = \int dt \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + V(\mathbf{x}) \right).$$

- * $|\Omega\rangle$: Grundzustand.
- * $\mathcal{O}(\mathbf{x})$: Beliebige Observable der Orte, d.h. Funktional von $\mathbf{x}(t)$, z.B. quadratische Auslenkung, d.h. $\mathcal{O}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$.
- * $\int D\mathbf{x}$: Integration über alle möglichen Pfade (“Sum-Over-Histories”).
- * e^{-S_E} : Gewichtungsfaktor, der die Wirkung S_E enthält
→ Klassische Pfade “dominieren” das Pfadintegral.



Gittereichtheorie (3)

- Ausgangspunkt ist der Pfadintegralformalismus:

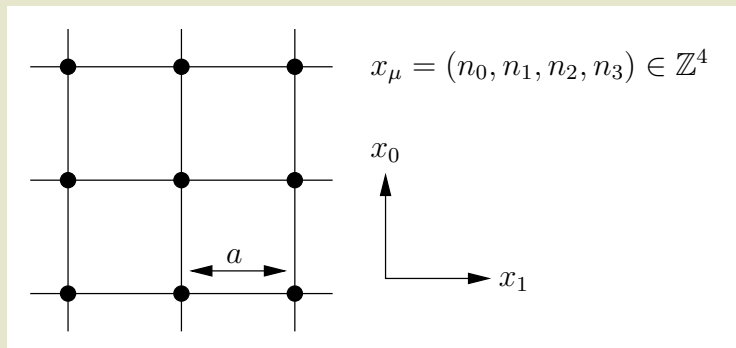
– QCD:

$$\langle \Omega | \mathcal{O}(\psi^{(f)}, A_\mu) | \Omega \rangle = \int D\psi D\bar{\psi} DA \mathcal{O}(\psi^{(f)}, A_\mu) e^{-S_E}$$
$$S_E = \int d^4x \left(\sum_f \bar{\psi}^{(f)} \left(\gamma_\mu (\partial_\mu - iA_\mu) + m_f \right) \psi^{(f)} + \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \right)$$

- * $|\Omega\rangle$: Grundzustand = Vakuum.
- * $\mathcal{O}(\psi^{(f)}, A_\mu)$: Beliebige Observable der Quark- und Gluonfelder, d.h. Funktional von $\psi^{(f)}(\mathbf{x}, t)$ und $A_\mu(\mathbf{x}, t)$.
- * $\int D\psi D\bar{\psi} DA$: Integration über alle möglichen Felder.
- * e^{-S_E} : Gewichtungsfaktor, der die Wirkung S_E enthält
→ Klassische Feldkonfigurationen “dominieren” das Pfadintegral.

Gittereichtheorie (4)

- Numerische Umsetzung des Pfadintegralformalismus in der QCD:
 - Raumzeit wird diskretisiert mit hinreichend kleinem Gitterabstand $a \approx 0.05 \text{ fm} \dots 0.10 \text{ fm}$
 - Kontinuumsphysik.
 - Raumzeit wird “periodisch gemacht” mit hinreichend großer Periodenlänge $L \approx 2.0 \text{ fm} \dots 4.0 \text{ fm}$ (4-dimensionaler Torus)
 - Keine Finite-Size Effekte.



Gittereichtheorie (5)

- Numerische Umsetzung des Pfadintegral...

– Gluonfeld:

- * Wirkung (im Kontinuum):

$$S_{E,\text{gluons}} = \int d^4x \frac{1}{2g^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}).$$

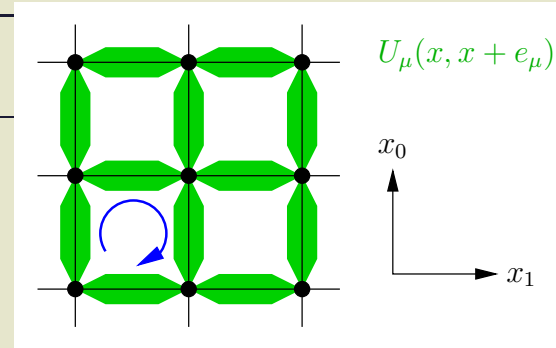
- * Um Eichinvarianz zu gewährleisten, “Indirekte Diskretisierung” des Gluonfelds A_μ durch Link-Variablen (Paralleltransporter, die benachbarte Gitterpunkte auf direktem Weg verbinden):

$$U_\mu(x) = P \left\{ \exp \left(-i \int_x^{x+ae_\mu} dz_\mu A_\mu(z) \right) \right\} \approx \exp \left(-iaA_\mu(x) \right).$$

- * Beispiel (keine Summe über μ und ν):

$$\begin{aligned} a^4 \left(\text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(a^2) \right) &= \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{3} \text{Re} \left(\text{Tr} \left(U_\mu(x) U_\nu(x+ae_\mu) U_\mu^\dagger(x+ae_\nu) U_\nu^\dagger(x) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

(wäre in der E-Dynamik $\propto (E_x)^2$ oder $\propto (B_x)^2$ oder ...).



Gittereichtheorie (6)

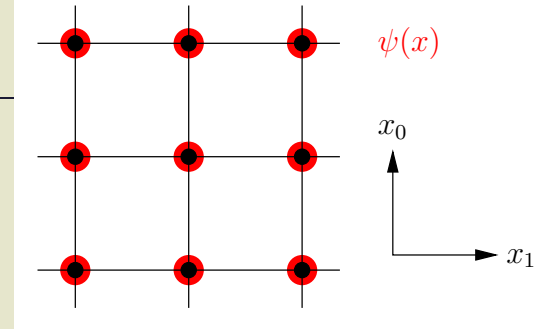
- Numerische Umsetzung des Pfadintegral...

- Quarkfelder:

- * Wirkung (im Kontinuum):

$$S_{E,\text{quarks}} = \int d^4x \sum_f \bar{\psi}^{(f)} \left(\gamma_\mu (\partial_\mu - iA_\mu) + m_f \right) \psi^{(f)}.$$

- * “Direkte Diskretisierung” der Quarkfelder $\psi^{(f)}$: “Leben” auf den Gitterpunkten.
- * Konzeptionell schwieriger und technisch sehr viel aufwändiger:
 - Fermionen-Verdopplungs-Problem.
 - Chirale Symmetrie explizit gebrochen.
 - Simulationen bei physikalischen Werten der leichten u und d Quark-Massen extrem aufwändig.
 - Diskretisierungsfehler proportional zum Gitterabstand.



Gittereichtheorie (7)

- Numerische Umsetzung des Pfadintegralformalismus in der QCD:
 - Pfadintegral wird durch Diskretisierung zu hochdimensionalem endlichen Integral:

$$\int D\psi D\bar{\psi} DA \rightarrow \prod_{x_\mu} \left(\int d\psi(x_\mu) d\bar{\psi}(x_\mu) dU(x_\mu) \right).$$

- Typische Dimension dieser diskretisierten Pfadintegrale:
 - * x_μ : $32^4 \approx 10^6$ Gitterpunkte.
 - * $\psi = \psi_A^{a,(f)}$: 24 Quarkfreiheitsgrade für jeden Flavor ($\times 2$ Ladung, $\times 3$ Farbe, $\times 4$ Spin), 2 Flavors.
 - * $U = U_\mu^{ab}$: 32 Gluonfreiheitsgrade ($\times 8$ Farbe, $\times 4$ Spin).
 - * Insgesamt: $32^4 \times (2 \times 24 + 32) \approx \mathbf{83} \times \mathbf{10^6}$ -dimensionales Integral.
- Standard-Verfahren zur numerischen Integration nicht anwendbar
- Spezielle Integrationsalgorithmen erforderlich (stochastische Verfahren, so genannte Monte-Carlo-Algorithmen).

B-Physik und Gittereichtheorie (1)

- Im Gegensatz zu leichten u , d und s Quarks können schwere b Quarks nicht unmittelbar mit dem bisher beschriebenen Formalismus behandelt werden:
 - Feldkonfigurationen in der Nähe klassischer Lösungen mit niedriger Wirkung werden durch e^{-S_E} nur schwach unterdrückt und spielen daher eine wichtige Rolle im Pfadintegral.
 - Klassische Bewegungsgleichung für Quarks ist die Dirac-Gleichung (“relativistische Version der Schrödinger-Gleichung”):

$$\left(\gamma_\mu(\partial_\mu - iA_\mu) + m_f\right)\psi^{(f)} = 0$$

($\psi^{(f)}$ hat vier Spinkomponenten; γ_μ : 4×4 -Matrizen).

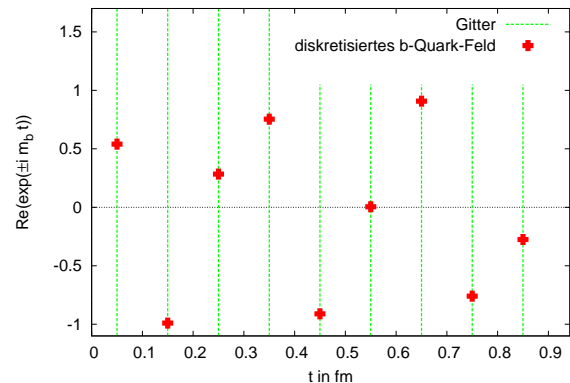
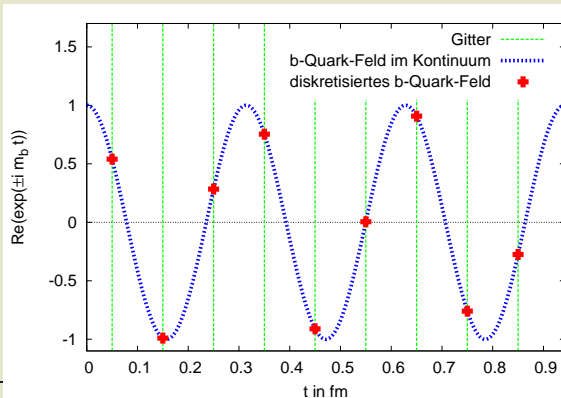
- Lösungen im freien Fall ($A_\mu = 0$) sind ebene Wellen:

$$\psi_{-,s}^{(f)} = e^{-i(E(\mathbf{p})t - \mathbf{p}\mathbf{x})} u^s(\mathbf{p}) \quad , \quad \psi_{+,s}^{(f)} = e^{+i(E(\mathbf{p})t - \mathbf{p}\mathbf{x})} (v^s(\mathbf{p}))^\dagger$$

mit $E(\mathbf{p}) = \sqrt{m_f^2 + \mathbf{p}^2} \approx m_f$ für kleine Impulse \mathbf{p} und $s = 1, 2$, also zwei Lösungen $\psi_{-,s}^{(f)} \propto e^{-im_f t}$ und zwei Lösungen $\psi_{+,s}^{(f)} \propto e^{+im_f t}$.

B-Physik und Gittereichtheorie (2)

- Im Gegensatz zu leichten u , d und s Quarks können schwere b Quarks nicht unmittelbar mit dem bisher beschriebenen Formalismus behandelt werden:
 - Darstellung dieser Lösungen für b Quarks auf dem Gitter:
 - * $m_b \approx 4000 \text{ MeV} \approx 20/\text{fm}$.
 - * Typischer Gitterabstand: $a = (1/10) \text{ fm}$.
 - * Oszillationen des b -Quark-Feldes $\psi_{\pm,s}^{(f)} \propto e^{\pm im_b t}$ können bei momentan realisierbaren Gitterabständen nicht aufgelöst werden.
 - * Leichte Quarks unproblematisch (größere Wellenlänge von $e^{\pm im_f t}$).



B -Physik und Gittereichtheorie (3)

- Ausweg: HQET (Heavy Quark Effective Theory).

- Variablentransformation des b Quark-Feldes:

$$\psi^{(b)} \rightarrow \psi'^{(b)} = e^{+im_b t} \psi^{(b)}.$$

- Zwei der vier Lösungen verlieren den stark oszillierenden Phasenfaktor:

$$\psi'^{(f)}_{-,s} \propto 1.$$

- Zwei der vier Lösungen oszillieren doppelt so stark:

$$\psi'^{(f)}_{+,s} \propto e^{-i2m_b t}.$$

Über die diesen Lösungen entsprechenden Feldkonfigurationen kann im Pfadintegral jedoch analytisch integriert werden.

- Ergebnis: Potenzreihe in $1/m_b$, wobei die nullte Ordnung statische (= unendlich schwere) b Quarks beschreibt.

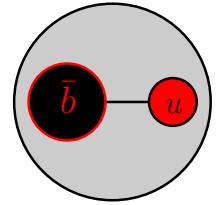
Berechnung von Observablen

- Mit Hilfe der Gittereichtheorie können numerisch **Vakuumerwartungswerte von Funktionalen von Quark- und Gluonfeldern** berechnet werden:

$$\langle \Omega | \mathcal{O}(\psi^{(f)}, A_\mu) | \Omega \rangle = \int D\psi D\bar{\psi} DA \mathcal{O}(\psi^{(f)}, A_\mu) e^{-S_E}.$$

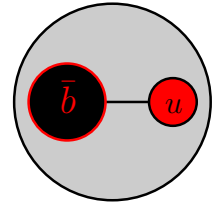
- Wie können aus solchen Erwartungswerten Größen bestimmt werden, die auch experimentell messbar sind?
- Im Folgenden zwei Beispiele:
 - Spektrum, d.h. Massen von B -Mesonen (Grundzustand, radial und orbital angeregte Zustände).
 - Zerfall von B -Mesonen in orbital angeregte D -Mesonen (“Zerfallswahrscheinlichkeit”).

Massen von B -Mesonen (1)



- B -Meson:
 - Gebundenes Quark-Antiquark-Paar (ein schweres b Quark und ein leichtes u , d oder s Quark).
 - “Wasserstoff-Atom der QCD”: Ein sehr leichtes Teilchen (u , d , oder s) “umkreist” ein sehr schweres Teilchen (\bar{b}).
 - Zustände charakterisiert durch:
 - * **Gesamtdrehimpuls/Spin J** bzw. für $m_B \rightarrow \infty$ **Gesamtdrehimpuls/Spin der leichten Freiheitsgrade j** (leichte Quarks und Gluonen; $m_B \rightarrow \infty$ entspricht einer Vernachlässigung der Hyperfeinaufspaltung).
 - * **Parität \mathcal{P}** .
 - * **Radiale Quantenzahl**; im Folgenden jedoch häufig nur Grundzustände in den jeweiligen $j^{\mathcal{P}}$ -Sektoren.
- Im Folgenden daher meist $j^{\mathcal{P}}$.

Massen von B -Mesonen (2)



- Konstruktion eines B -Meson-Zustands:

- Der Quarkfeldoperator $\psi^{(u)}(\mathbf{x})$ platziert ein u Quark bei Position \mathbf{x} .
- Der Quarkfeldoperator $\bar{\psi}^{(b)}(\mathbf{x})$ platziert ein b Antiquark bei Position \mathbf{x} .
- Zustand, der ein B -Meson am Raumpunkt \mathbf{x} enthält:

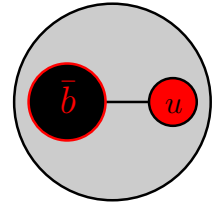
$$B^{(\Gamma)}|\Omega\rangle = \bar{\psi}^{(b)}(\mathbf{x})\Gamma\psi^{(u)}(\mathbf{x})|\Omega\rangle \quad (B^{(\Gamma)}: \text{Meson-Erzeugungsoperator}).$$

- * Γ : Geeignet gewählte 4×4 -Matrix.

- Wirkt auf Spinindizes der Quarks; realisiert dadurch den gewünschten Drehimpuls J bzw. j sowie die Parität \mathcal{P} .
- Kombination der aus der Dirac-Gleichung bekannten γ -Matrizen, z.B. $\Gamma = \gamma_5$ entspricht $J^{\mathcal{P}} = 0^-$ bzw. $j^{\mathcal{P}} = (1/2)^-$, dem leichtesten B -Meson.

- * $B^{(\Gamma)}|\Omega\rangle$ enthält eine Überlagerung von B -Meson-Zuständen aller radialen Quantenzahlen, d.h. des Grundzustands und aller angeregter Zustände.

Massen von B -Mesonen (3)

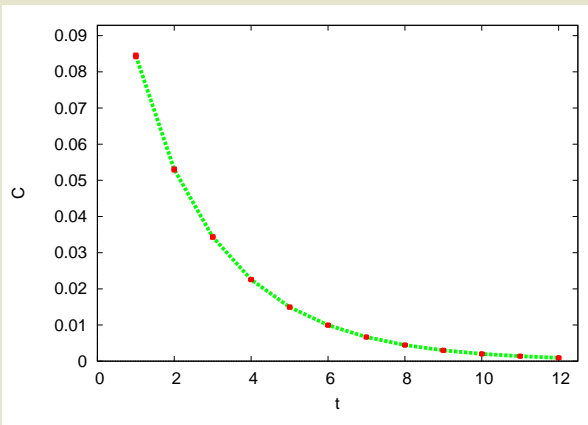


- Berechnung der B -Meson-Masse ($J = 0^-$ bzw. $j = (1/2)^-$):
 - Berechne den Vakuumerwartungswert

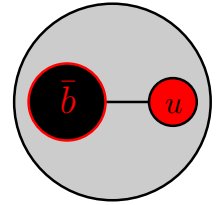
$$C(t) = \langle \Omega | \underbrace{\left(\bar{\psi}^{(b)}(\mathbf{x}, t) \gamma_5 \psi^{(u)}(\mathbf{x}, t) \right)^\dagger}_{=(B(\gamma_5)^\dagger)(t)} \underbrace{\bar{\psi}^{(b)}(\mathbf{x}, 0) \gamma_5 \psi^{(u)}(\mathbf{x}, 0)}_{=B(\gamma_5)(0)} | \Omega \rangle$$

als Funktion von t numerisch mit Hilfe der Gittereichtheorie.

- $C(t)$: “Meson-Korrelationsfunktion”.



Massen von B -Mesonen (4)



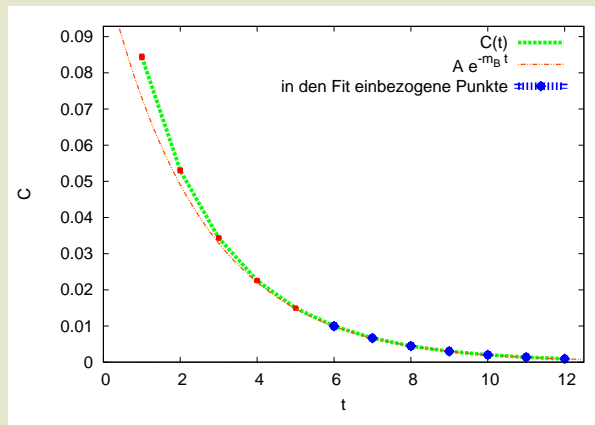
- Berechnung der B -Meson-Masse ($J = 0^-$ bzw. $j = (1/2)^-$):

– Analytische Umformung durch Einfügen einer “Energie-Eins”:

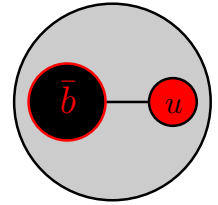
$$C(t) = \langle \Omega | \left(B^{(\Gamma)}(t) \right)^\dagger B^{(\Gamma)}(0) | \Omega \rangle = \dots \approx_{t \gg 1} \text{const} \times e^{-m_B t}$$

(m_B : Gesuchte B -Meson-Masse; const: Uninteressante Konstante).

- Extrahieren von m_B z.B. durch Fitten von $Ae^{-m_B t}$ an die numerisch berechneten Punkte von $C(t)$ mit A und m_B als Fitparameter.



Massen von B -Mesonen (5)



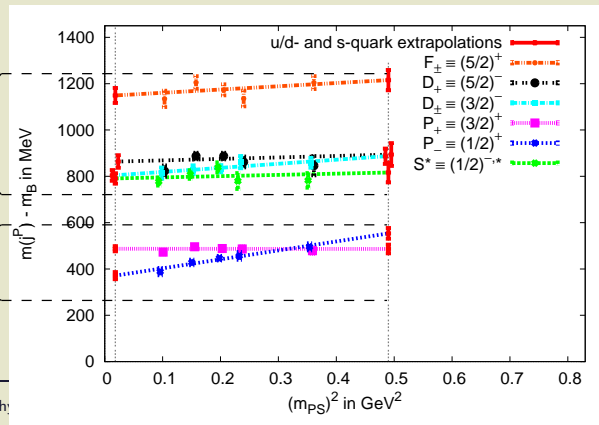
- Statisch-leichtes Meson-Spektrum ($m_B \rightarrow \infty$):
 - “ x -Achse”: Pion-Masse m_{PS} (aufgrund technischer Schwierigkeiten $m_{\pi}^{(\text{Gitter})} \gtrsim 300 \text{ MeV}$, wohingegen $m_{\pi}^{\text{physikalisch}} \approx 140 \text{ MeV}$, d.h. Extrapolation erforderlich).
 - “ y -Achse”: $m(j^P) - m_B$ Massendifferenz zwischen radial und orbital angeregten B -Mesonen ($B_0^*, B_1^*, B_1, B_2^*, \dots$) und dem Grundzustands- B -Meson ($B^{\pm}/B^0/B^*$).

[K. Jansen, C. Michael, A. Shindler and M.W. [ETM Collaboration], JHEP 0812, 058 (2008)]

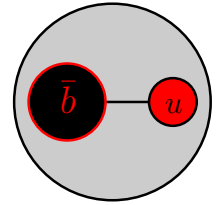
Vorhersagen
 $j^P \in \{(3/2)^-, (5/2)^-, (5/2)^+, (1/2)^-, *\}$

Vergleich mit Experiment
 (nächste Folie)

$j^P \in \{(1/2)^+, (3/2)^+\}$



Massen von B -Mesonen (6)

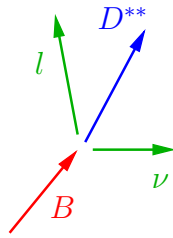


- Vergleich mit experimentellen Werten:
 - Extrapolation zur physikalischen b -Quark-Masse $m_B \approx 4200$ MeV mit Hilfe von experimentellen Ergebnissen für c Quarks, d.h. D -Mesonen (Extrapolation \equiv Einbeziehen der Hyperfeinstruktur).

	$m - m_B$ in MeV			
state	J^P	j^P	lattice	PDG
B_0^*	0^+	$(1/2)^+$	413(19)	
B_1^*	1^+	$(1/2)^+$	428(19)	
B_1	1^+	$(3/2)^+$	508(8)	444(0)
B_2^*	2^+	$(3/2)^+$	519(8)	464(5)
B_J^*	?	?		419(8)

- In Arbeit: Kontinuumslimes, Ausschließen von Finite-Volume-Effekten, Hinzunahme von dynamischen s und c Quarks, Untersuchung möglicher Effekte von Vielteilchenzuständen ($B + \pi^\pm$, $B + \pi^0$), ...

Semileptonische Zerfälle $B \rightarrow D^{**}$ (1)



- Die schwache Wechselwirkung verursacht die Umwandlung von Quark-Flavors, z.B. $b \rightarrow c + l + \nu$.
- Betrachte die auf der schwachen Wechselwirkung basierenden Zerfälle

$$B \rightarrow D^{**} + l + \nu.$$

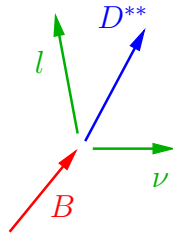
– B : $j = (1/2)^-$ B -Meson.

– D^{**} :

- * Orbital angeregtes D -Meson (z.B. $\bar{c}u$) mit Parität $\mathcal{P} = +$.
- * Kopplung des Bahndrehimpuls $L = 1$ (“ P -Welle”) und des leichten und schweren Quarkspins liefert vier mögliche Zustände:
 - Zwei $1/2$ - D^{**} ($L = 1$ und leichter Quarkspin $1/2$ werden zu Gesamtdrehimpuls $j = 1/2$ gekoppelt).
 - Zwei $3/2$ - D^{**} ($L = 1$ und leichter Quarkspin $1/2$ werden zu Gesamtdrehimpuls $j = 3/2$ gekoppelt).

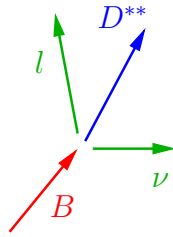
– $l + \nu$: Lepton und zugehöriges Neutrino.

Semileptonische Zerfälle $B \rightarrow D^{**}$ (2)



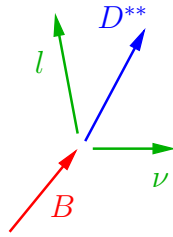
- Konflikt zwischen Theorie und Experiment:
 - **Theorie** (Operator-Product-Expansion, Sum-Rules):
 - * Zerfall von B in $3/2-D^{**}$ ist wahrscheinlicher.
 - * Jedoch:
 - Aussagen gelten nur im Limes $m_B \rightarrow \infty$.
 - Annahme: Angeregte Zustände können in Sum-Rules vernachlässigt werden.
 - Aussagen betreffen ausschließlich die “Zero-Recoil-Situation”.
 - **Experiment**:
 - * Zerfall von B in $1/2-D^{**}$ ist wahrscheinlicher.
 - * Jedoch:
 - Das gemessene Signal für $1/2-D^{**}$ ist extrem schwach.
 - Annahme: Keine Beiträge von Zuständen “höher als D^{**} ”.
- Gitterrechnung können beitragen, diesen Konflikt aufzulösen.

Semileptonische Zerfälle $B \rightarrow D^{**}$ (3)



- Berechnung der Zerfallswahrscheinlichkeiten:
 - Grundlage ist zeitabhängige Störungsrechnung (Fermi's Goldene Regel).
 - * Ungestörte Theorie: QCD.
 - * Stör-Hamilton-Operator: Schwache Wechselwirkung.
 - * Notwendig ist die Berechnung der Matrix-Elemente
$$\mathcal{M}_{fi} = \langle D_{1/2|3/2}^{**} l \nu | \mathcal{H}_{\text{schwach}} | B^{(*)} \rangle.$$
 - \mathcal{M}_{fi} kann aufgesplittet werden in einen leptonischen Anteil (enthält l, ν) und einen hadronischen Anteil (enthält $D_{1/2|3/2}^{**}, B^{(*)}$).
 - Leptonischer Anteil kann analytisch berechnet werden (“kinematische Faktoren” in differentiellen Zerfallsraten).
 - Hadronischer Anteil kann numerisch mit Hilfe von Gittereichtheorie berechnet werden (“Isgur-Wise-Funktionen” $\tau_{1/2}$ und $\tau_{3/2}$ in differentiellen Zerfallsraten).

Semileptonische Zerfälle $B \rightarrow D^{**}$ (4)



- Gitter-Ergebnis:

$$\tau_{1/2} = 0.30(3) \quad , \quad \tau_{3/2} = 0.53(2)$$

(“ $|\tau_{1/2}|^2$ ist proportional zur Zerfallswahrscheinlichkeit in $1/2-D^{**}$ ”; ...).

[B. Blossier, M.W. and O. Pene [ETM Collaboration], JHEP 0906, 022 (2009)]

- Theorie-Ergebnis (Sum-Rules):

$$\left| \tau_{3/2} \right|^2 - \left| \tau_{1/2} \right|^2 \approx \frac{1}{4}$$

(Vergleich mit Gitter-Ergebnis: $0.53^2 - 0.30^2 = 0.19 \approx 1/4$; Sum-Rule wird zu etwa 80% erfüllt).

[N. Uraltsev, Phys. Lett. B 501, 86 (2001)]

- Experimentelles Ergebnis (Belle):

$$\tau_{1/2} \approx 1.28 \quad , \quad \tau_{3/2} \approx 0.75.$$

[D. Liventsev *et al.* [Belle Collaboration], Phys. Rev. D 77, 091503 (2008)]

Weitere aktuelle Projekte

- Massen von B -Baryonen (analog zum Spektrum von B -Mesonen).
- Weitere auf der schwachen Wechselwirkung basierende B -Meson-Zerfälle.
- “Kräfte zwischen b Quarks und B -Mesonen”:
 - String-Breaking (direkter Nachweis von Confinement: Wird ein Quark-Antiquark-Paar [hier $\bar{b}b$] auseinander gezogen, entsteht bei einem Abstand von ≈ 1 fm ein neues leichtes Quark-Antiquark-Paar [$\bar{u}u$ oder $\bar{d}d$]; es bilden sich zwei B -Mesonen).
 - BB -Potentiale (“Van-der-Waals-Kräfte” zwischen B -Mesonen, d.h. “Kernkräfte”).

Zusammenfassung

- Gittereichtheorie ermöglicht numerische Berechnung von QCD-Observablen.
- Gittereichtheorie mit Hilfe von HQET (Heavy-Quark-Effective-Theory) trotz gegenwärtiger “großer Gitterabstände” $a \gtrsim 0.05$ fm auf B -Physik anwendbar.
- Ziele:
 - Präzisionsrechnungen, dann Vergleich mit Experimenten (“Suche nach neuer Physik”)
 - Notwendige Genauigkeit im Bereich der B -Physik noch nicht erreicht.
 - Vorhersagen/Berechnung experimentell schwer zugänglicher Observablen
 - Beispiel: Massen von angeregten B -Mesonen jenseits von $j = (3/2)^+$.
 - Qualitatives Verständnis
 - Beispiel: Zerfall von B in $3/2-D^{**}$ wahrscheinlicher als in $1/2-D^{**}$.

I would like to thank Michael Müller-Preußker, Rémi Baron, Benoit Blossier, Dietmar Ebert, Hilmar Forkel, Vladimir Galkin, Karl Jansen, Chris Michael, Attila Nagy, Olivier Pène, Andrea Shindler, Rainer Sommer and Christian Wiese for support, fruitful collaboration and/or valuable discussions.

Gittereichtheorie (7a)

- Numerische Umsetzung des Pfadintegralformalismus in der QCD:

$$\langle \Omega | \mathcal{O}(\psi^{(f)}, A_\mu) | \Omega \rangle = \int D\psi D\bar{\psi} DA \mathcal{O}(\psi^{(f)}, A_\mu) e^{-S_E}.$$

– Spezielle Integrationsalgorithmen erforderlich:

- * Stochastische Verfahren (Monte-Carlo-Algorithmen).

- * Grundlage:

- Feldkonfigurationen mit großer Wirkung werden über e^{-S_E} stark unterdrückt und tragen kaum zum Pfadintegral bei.
- Feldkonfigurationen mit kleiner Wirkung (\approx klassische Lösungen) sind nur in vergleichsweise geringer Anzahl vertreten.

→ Wechselspiel zwischen Wirkung und “Entropie”.

- * Grundprinzip:

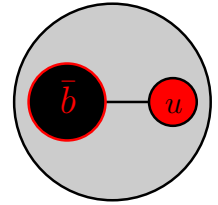
- Der Integrand $\mathcal{O}(\psi^{(f)}, A_\mu) e^{-S_E}$ wird zufällig abgetastet, vorwiegend im “relevanten Bereich” (“Importance-Sampling”).

→ Numerische Ergebnisse sind mit statistischen Fehlern behaftet.

B-Physik und Gittereichtheorie (3a)

- Verschiedene Strategien zur Realisierung der physikalischen *b*-Quark-Masse:
 - Berechnung der ersten Koeffizienten der HQET Potenzreihe in $1/m_b$ (schwierig; Berechnung von Renormierungsfaktoren erforderlich).
 - Beschränkung auf den statischen Grenzfall $m_b \rightarrow \infty$ (einfach; grobe Näherung; für qualitative Fragen o.k.).
 - Berechnung des statischen Grenzfalls $m_b \rightarrow \infty$ und einiger *b*-Quark-Massen im Bereich $m_b \approx m_c$ (für Letzteres keine HQET erforderlich); dann Interpolation in $1/m_b$ zur physikalischen *b*-Quark-Masse.
 - Kombination des statischen Grenzfalls $m_b \rightarrow \infty$ mit experimentellen Ergebnissen für *c* Quarks; dann Interpolation in $1/m_b$ zur physikalischen *b*-Quark-Masse.

Massen von B -Mesonen (4a)



- Berechnung der B -Meson-Masse ($J = 0^-$ bzw. $j = (1/2)^-$):
 - Analytische Umformung durch Einfügen einer “Energie-Eins”:

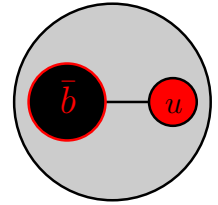
$$\begin{aligned}
 C(t) &= \langle \Omega | \left(B^{(\Gamma)}(t) \right)^\dagger B^{(\Gamma)}(0) | \Omega \rangle = \\
 &= \sum_n \underbrace{\langle \Omega | \left(B^{(\Gamma)}(t) \right)^\dagger | n \rangle \langle n | B^{(\Gamma)}(0) | \Omega \rangle}_{\neq 0 \text{ nur für Meson-Zustände } |n\rangle \text{ mit } j=(1/2)^-} = \dots
 \end{aligned}$$

- Beschränkung der Energie-Eins auf Meson-Zustände
 - $|0\rangle$ ist der Grundzustand im $j = (1/2)^-$ -Meson-Sektor:

$$\begin{aligned}
 C(t) &= \dots = \sum_n \langle \Omega | e^{+Ht} \left(B^{(\Gamma)}(0) \right)^\dagger e^{-Ht} | n \rangle \langle n | B^{(\Gamma)}(0) | \Omega \rangle = \\
 &= \sum_n \left| \langle n | B^{(\Gamma)}(0) | \Omega \rangle \right|^2 e^{-(E_n - E_\Omega)t} \approx_{t \gg 1} \underbrace{\left| \langle 0 | B^{(\Gamma)}(0) | \Omega \rangle \right|^2}_{=\text{konstant bzgl. } t} e^{-(E_0 - E_\Omega)t}.
 \end{aligned}$$

- $m_B = E_0 - E_\Omega$ ist die gesuchte B -Meson-Masse; sie kann aus dem exponentiellen Abfall von $C(t)$ für große t extrahiert werden.

Massen von B -Mesonen (4b)



- Berechnung der B -Meson-Masse ($J = 0^-$ bzw. $j = (1/2)^-$):

– Meson-Korrelationsfunktion:

$$C(t) \approx_{t \gg 1} \left| \langle 0 | B^{(\Gamma)}(0) | \Omega \rangle \right|^2 e^{-m_B t}.$$

– Effektive Masse:

$$m_B^{\text{effektiv}}(t) = -\frac{d}{dt} \ln(C(t)) \approx_{t \gg 1} m_B.$$

– Plateau-Wert der effektiven Masse $m_B^{\text{effektiv}}(t)$ entspricht der gesuchten B -Meson-Masse m_B .

