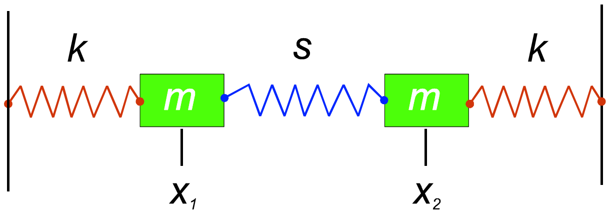
26. Vorlesung Wintersemester

1 Gekoppelte Oszillatoren



Es seien zwei Oszillatoren miteinander und jeweils mit der Wand über Federn gekoppelt. Der Einfachheit halber haben die beiden äußeren Federn dieselbe Federkonstante k, und die Massen seien beide gleich m. Die innere Feder habe die Federkonstante s.

Als Koordinaten nehmen wir die *Auslenkungen* der beiden Massenpunkte aus der Ruhelage, so dass für $x_1 = x_2 = 0$ das System ruhe. Die Bewegungsgleichungen sind dann

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - s(x_1 - x_2), \qquad m\ddot{x}_2 = -kx_2 + s(x_1 - x_2). \tag{1}$$

Wir suchen spezielle Lösungen der Form

$$x_1(t) = \alpha_1 \, e^{i\omega t}, \quad x_2(t) = \alpha_2 \, e^{i\omega t}, \tag{2}$$

d. h. spezielle Schwingungen, bei denen beide Massenpunkte mit demselben zeitlichen Verhalten schwingen. Einsetzen führt auf das homogene, lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + k + s)\alpha_1 - s\alpha_2 = 0 \\ (-m\omega^2 + k + s)\alpha_2 - s\alpha_1 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + k + s & -s \\ -s & -m\omega^2 + k + s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Aus der Linearen Algebra: eine homogene lineare Gleichung der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

hat nur dann eine nichtverschwindende Lösung, wenn die Determinante der Matrix verschwindet. In diesem Fall (einer 2×2-Matrix) ist die Determinante durch $ad - bc$ gegeben.

Für die gekoppelten Oszillatoren führt das auf die Bedingung

$$\left(-m\omega^2 + k + s\right)^2 - s^2 = 0, \tag{6}$$

also eine quadratische Gleichung für ω^2. Man kann sie entweder mit der Standardmethode lösen, oder mit der dritten binomischen Formel faktorisieren:

$$\left(-m\omega^2 + k + s\right)^2 - s^2 = (-m\omega^2 + k + 2s)(-m\omega^2 + k). \tag{7}$$

Daraus erkennt man sofort die beiden Lösungen

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k+2s}{m}}, \qquad \omega_- = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{8}$$

Einsetzen in das lineare Gleichungssystem (4) ergibt Bedingungen für die Amplituden der beiden Massenpunkte:

$$\begin{array}{c} \omega_+ : \alpha_1 = -\alpha_2 \\ \omega_- : \alpha_1 = \alpha_2 \end{array} \tag{9}$$

Wir haben damit die beiden *Eigenfrequenzen* und *Eigenschwingungen* konstruiert, die man auch als *Eigenmoden* bezeichnet.

Die physikalische Bedeutung ist einfach abzulesen:

1. Für die Eigenschwingung mit ω_- schwingen die beiden Massenpunkte immer in dieselbe Richtung ($x_1(t) = x_2(t)$) und halten ihren Abstand konstant. Deswegen hängt die Eigenfrequenz nicht von s ab: die mittlere Feder wird ja weder gedehnt noch gestaucht.

2. Für die Eigenschwingung mit ω_+ dagegen schwingen sie gegeneinander ($x_1(t) = -x_2(t)$); die Eigenfrequenz ist größer, weil jetzt die Kräfte aller drei Federn zusammen wirken.

Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination der beiden Eigenschwingungen. In reller Form wird das

$$\begin{array}{c} x_1(t) = \alpha_1 \cos(\omega_- t + \phi) + \alpha_1' \cos(\omega_+ t + \phi') \\ x_2(t) = \alpha_1 \cos(\omega_- t + \phi) - \alpha_1' \cos(\omega_+ t + \phi') \end{array} . \tag{10}$$

Die unbekannten Größen α_1, α_1', ϕ und ϕ' sind genau die Anzahl, die man zur Erfüllung der Anfangsbedingungen $x_1(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $x_2(0)$, und $\dot{x}_2(0)$ braucht.

Die allgemeine Schwingung kann sehr komplex aussehen. Man nehme z. B. die Lösung mit $\alpha_1' = -\alpha_1$ und $\phi = \phi' = 0$. Sie lässt sich umschreiben:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \alpha_1(\cos\omega_- t - \cos\omega_+ t) = 2\alpha_1 \sin\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}\,t\ \sin\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}\,t \\ x_2(t) &= \alpha_1(\cos\omega_- t + \cos\omega_+ t) = 2\alpha_1 \cos\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}\,t\ \cos\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}\,t \end{aligned} \tag{11}$$

Beide setzen sich zusammen aus einer schnelleren Schwingung mit der Frequenz $\omega_+ + \omega_-$, deren Amplitude mit der langsameren Frequenz $\omega_+ - \omega_-$ moduliert wird. Da die beiden Schwingungen zueinander gerade um $\pi/2$ phasenverschoben sind, wechselt die Schwingungsenergie regelmäßig zwischen den beiden Massenpunkten hin und her.

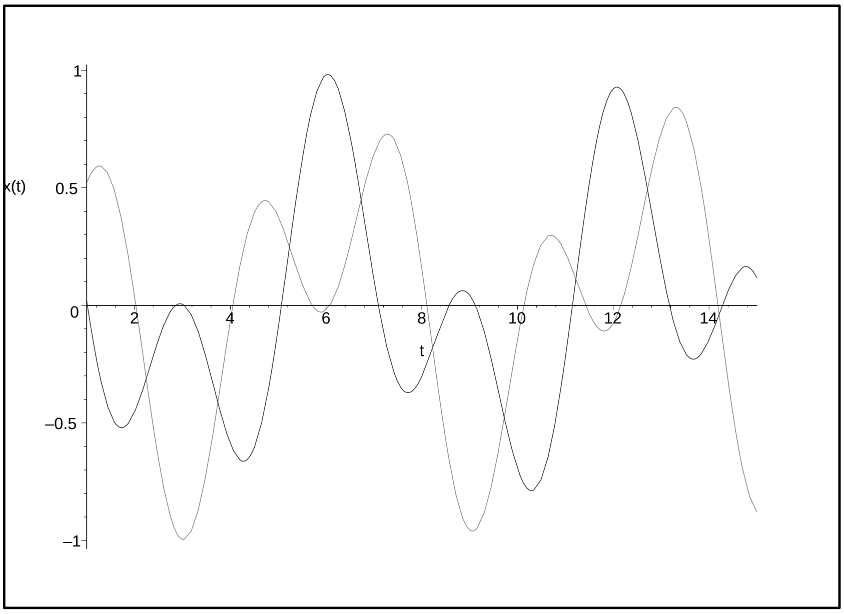


Illustration der Schwingungen der beiden Massenpunkte für den Fall $\omega_- = 1$ und $\omega_+ = 2.1$.

2 Das Eigenwertproblem für Matrizen

Die Bedingungsgleichung für die Frequenzen lässt sich auch so umformen:

$$\frac{1}{m}\begin{pmatrix} k+s & -s \\ -s & k+s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

d.h. man sucht zu einer Matrix einen Vektor, der die Eigenschaft hat, dass die Matrix auf ihn angewandt seine Richtung nicht ändert, sondern ihn nur mit einem Skalar multipliziert. Ein solcher Vektor ist ein *Eigenvektor* der Matrix und der zugehörige Skalar der *Eigenwert* (engl. *eigenvector* und *eigenvalue*). Die Eigenvektoren sind nur in ihrer Richtung, nicht in der Länge bestimmt.

Im Fall der zwei gekoppelten Oszillatoren sind also die Eigenwerte mit den zugehörigen Eigenvektoren:

- ω_-^2 mit Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und
- ω_+^2 mit Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Man wählt die Eigenvektoren in der Länge meist auf eins normiert, was hier den Vorfaktor ergibt.

3 Viele gekoppelte Oszillatoren

Für N gekoppelte Oszillatoren erhält man Bewegungsgleichungen der allgemeinen Form

$$m_j \ddot{x}_j = \sum_l k_{jl}(x_l - x_j), \tag{13}$$

wobei die Koeffizienten k_{jl} die Federkonstanten zwischen den Oszillatoren beschreiben. Mit dem Ansatz

$$x_j(t) = \alpha_j \, e^{i\omega t}, \; j = 1 \dots N \tag{14}$$

erhält man wieder ein Eigenwertproblem (Matrixgleichung hier als Summe geschrieben)

$$\left(\sum_l \frac{k_{jl}}{m_j} \right) \alpha_j - \sum_{\substack{l \\ l \neq j}} \frac{k_{jl}}{m_j} \alpha_l = \omega^2 \alpha_j, \quad j = 1 \dots N \tag{15}$$

für die Matrix der Kopplungskonstanten. Daraus bekommt man i. A. N Eigenfrequenzen mit den zugehörigen Eigenschwingungen.

Solche Eigenwertprobleme spielen in der Physik eine große Rolle und ihre numerische Lösung ist für die Lineare Algebra eine wichtige Aufgabe.