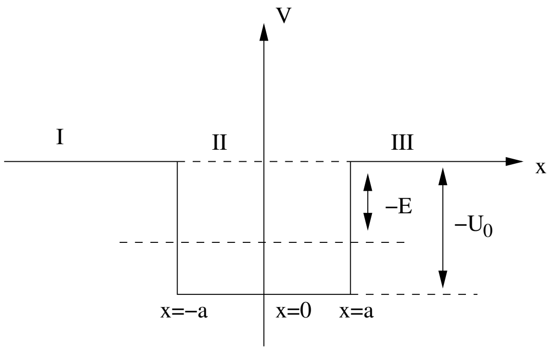
Theoretische Physik III für das Lehramt L3, WS2003/04, Prof. H.J. Lüdde

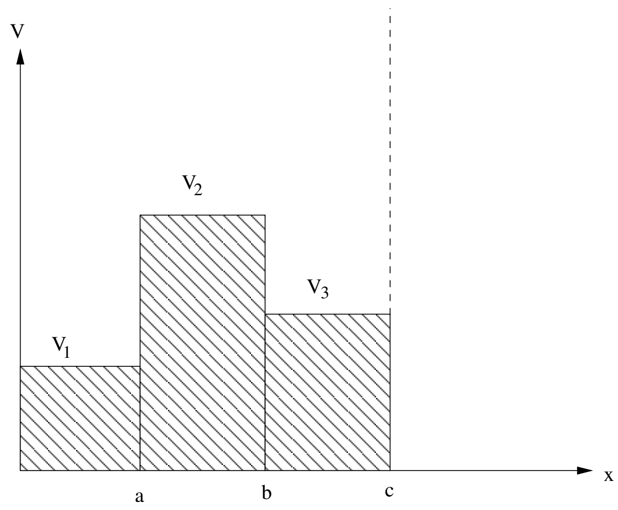
Aufgaben - Kapitel III Quantenmechanik

1. Löse die Schrödinger-Gleichung für den eindimensionalen Potentialtopf.



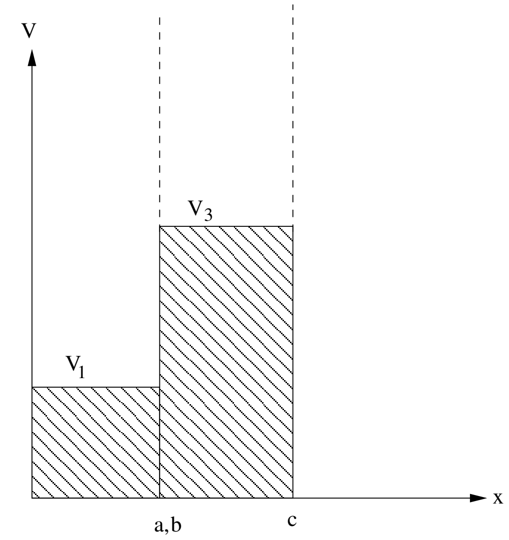
2. Manche Potentiale lassen sich durch stückweise konstante Potentiale approximieren. Bestimme die Eigenwertbedingung für das Potential:

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & 0 \leq x \leq a \\ V_2 & a < x \leq b \\ V_3 & b < x \leq c \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$



3. Betrachte die Schrödinger-Gleichung für folgendes Potential

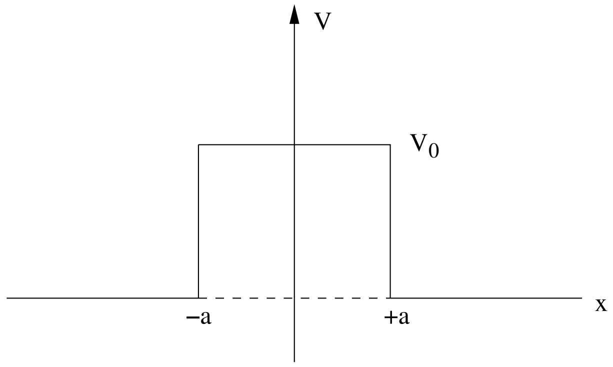
$$V(x) = \begin{cases} V_1 & 0 \leq x \leq a \\ V_3 & b < x \leq c \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$



Die Gebiete $0 \leq x \leq a$ und $b < x \leq c$ sind zusätzlich bei $x = a$ durch eine unendlich dünne und hohe Potentialwand getrennt. Welchen Einfluss hat sie auf die Lösung der Schrödinger-Gleichung?

4. Zeige, dass die Wellenfunktion für die Streuung einer (von links nach rechts laufenden) ebenen Welle an der Potentialbarriere

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -a \\ V_0 & -a \leq x \leq a \\ 0 & a < x < \infty \end{cases}$$



gleich

$$\psi(x) = \begin{cases} b_1 e^{ikx} + c_1 e^{-ikx} & -\infty < x < -a \\ b_2 e^{i\alpha x} + c_2 e^{-i\alpha x} & -a \leq x \leq a \\ b_3 e^{ikx} + c_3 e^{-ikx} & a < x < \infty \end{cases}$$

ist, wobei

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \text{und} \quad \alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}\ .$$

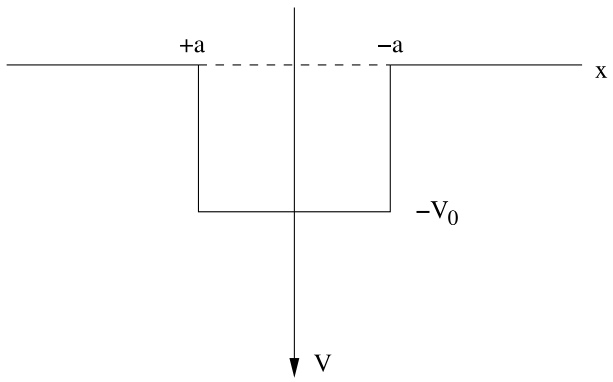
Betrachte die Fälle $E > V_0$ und $E < V_0$; wie verhält sich der Transmissionskoeffizient

$$T = \frac{|b_3|}{|b_1|}^2$$

bei festem V_0 als Funktion der Energie?

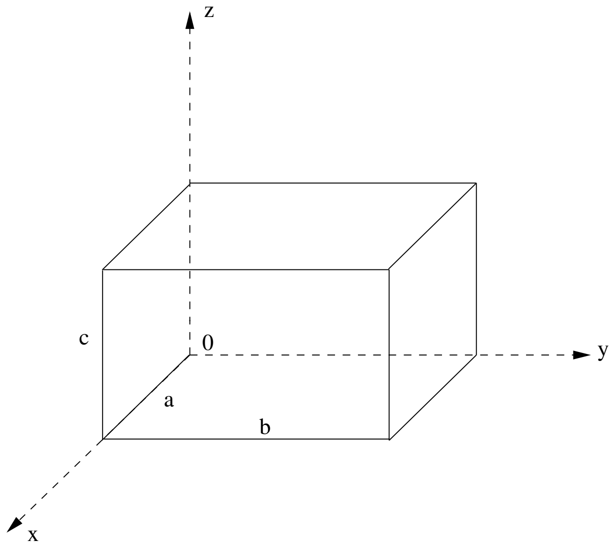
5. Zeige, dass es auch bei der Streuung $(E > 0)$ am rechteckigen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -a \\ -V_0 & -a \leq x \leq a \\ 0 & a < x < \infty \end{cases}$$



sinnvoll ist, einen Transmissionskoeffizienten zu definieren. Berechne die Wellenfunktion und diskutiere T in Abhängigkeit von E bei festem V_0.

6. Ein Teilchen ist eingeschlossen in eine rechteckige Box mit undurchdringlichen Wänden, in der es sich frei bewegen kann.



a) Berechnen Sie die Eigenfunktionen und möglichen Energien.

b) Was können Sie über *Entartung* der Wellenfunktion aussagen, d.h. existieren mehrere linear unabhängige Wellenfunktionen zum gleichen Energieeigenwert?

7. a) Ein Teilchen der Masse m sei in einem eindimensionalen harmonischen Potential. Zur Zeit $t = 0$ sei die normierte Wellenfunktion gegeben durch

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/2\sigma^2} \ ,$$

wobei $\sigma^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$ eine Konstante ist. Finden Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Impuls des Teilchens zur Zeit $t > 0$ positiv ist.

b) Betrachten Sie einen eindimensionalen Oszillator im n-ten Energiezustand. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x^2 \rangle$, $\langle x \rangle$, $\langle p^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ und die Matrixelemente $\langle n|x|m \rangle$, $\langle n|p|m \rangle$. Benutzen Sie dazu die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$. Was können Sie über die Unschärferelation $\Delta x \Delta p$ aussagen?

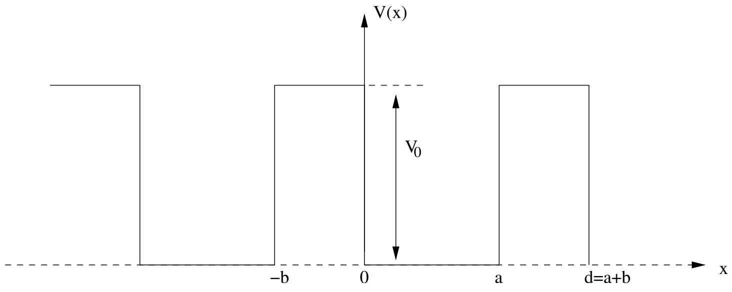
c) Lösen Sie das Problem des harmonischen Oszillators in Impuls-Darstellung.

8. Man berechne die Energieniveaus für ein Teilchen in dem Feld mit der potentiellen Energie

$$U(x) = A\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\right)$$

für $E > 0$.

9. Zeigen Sie, dass das Energiespektrum eines Teilchens in dem periodischen Potential



eine Bandstruktur hat. Anleitung:

a) Wie ist der Einfluss des periodischen Potentials auf die Wellenfunktion?

b) Durch die Stetigkeitsbedingungen bekommen Sie 4 Gleichungen für die Koeffizienten in den Ansätzen für die Wellenfunktionen. Nichttriviale Lösungen erhalten Sie, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet.

c) Unterscheiden Sie die Fälle $0 < E < V_0$ und $E > V_0$. Um das Spektrum zu untersuchen, lassen Sie b gegen Null und V_0 gegen unendlich gehen derart, dass $b\delta^2$ endlich bleibt, wobei

$$\delta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$$

ist.

Für welches physikalische System ist dieses Potential eine Approximation?

10. a) Der Drehimpulsoperator $\hat{L}$ ist definiert als

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p} \ .$$

Nutzen Sie die Kommutatorrelationen zwischen $\hat{r}$ und $\hat{p}$ um folgende Kommutationsrelationen zu finden: $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$, $[\hat{L}_y^2, \hat{L}_x]$, $[\hat{L}_z^2, \hat{L}_x]$, $\hat{L}^2, \hat{L}_x]$.

b) Der Paritätsoperator $\hat{\Pi}$ ist definiert durch

$$\hat{\Pi}|\vec{r}>=|-\vec{r}> \ .$$

i) Sei $|\psi>$ ein beliebiger Ket mit korrespondierender Wellenfuktion $\psi(\vec{r})$. Finden Sie die Wellenfunktion $\hat{\Pi}|\psi>$.

ii) Zeigen Sie, dass $\hat{\Pi}$ hermitesch ist.

iii) Finden Sie den Operator $\hat{\Pi}^2$. Was sind seine möglichen Eigenwerte?

iv) Wir definieren

$$\hat{p}_+ = \frac{1}{2}(1+\hat{\Pi}) \quad , \quad \hat{p}_- = \frac{1}{2}(1-\hat{\Pi}) \ ,$$
$$|\psi_+>=\hat{p}_+|\psi> \quad , \quad |\psi_->=\hat{p}_-|\psi> \ .$$

Zeigen Sie, dass $|\psi_+>$ und $|\psi_->$ Eigenvektoren zu $\hat{\Pi}$ sind.

v) Zeigen Sie, dass die zu $|\psi_+>$ und $|\psi_->$ gehörenden Wellenfunktionen gerade bzw. ungerade Funktionen sind.

c) Besitzt der Projektionsoperator $P(|a>) = |a><a|$ ein Inverses?

11. In einer Basis $|u_i>$ seien die Operatoren A und B dargestellt durch die Matrizen (A_{ij}) und (B_{ij}). Das Ket $|\psi>$ ist durch c_i, das Bra $<\psi|$ durch b_i^* dargestellt.

a) Finden Sie die Matrixdarstellung des Operators AB.

b) Finden Sie die Darstellung von $A|\psi>$.

c) Finden Sie einen Ausdruck für den Skalar $<\phi|A|\psi>$ ausgedrückt durch obige Darstellungen.

d) Was ist die Matrixdarstellung von $P(|u_k>) = |u_k><u_k|$?

12. a) Berechne das mittlere Potential des Feldes, das vom Kern und dem Elektron im Grundzustand des Wasserstoffatoms erzeugt wird.

b) Diskutiere die Lösung für $r \to 0$ und $r \to \infty$.

13. a) Gegeben sei die Wellenfunktion für ein wasserstoffartiges Atom:

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{81}\sqrt{\frac{2}{\pi}} Z^{3/2}(6-Zr)Zre^{-Zr/3}\cos\theta \ ,$$

wobei r in Einheiten des Bohrschen Radius a_0 ausgedrückt ist.

i) Finden Sie die korrespondierenden Werte der Quantenzahlen n, l, m.

ii) Konstruieren Sie ausgehend von $\psi(r,\theta)$ eine andere Wellenfunktion mit den gleichen Werten n und l, aber mit einer anderen magnetischen Quantenzahl, $m = +1$.

iii) Berechnen Sie den wahrscheinlichsten Wert von r für ein Elektron in dem zu ψ korrespondierenden Zustand und mit $Z = 1$.

b) Die Wellenfunktion eines Elektrons in einem wasserstoffartigen Atom sei

$$\psi(r) = Ce^{-r/a} ,$$

mit $a = a_0/Z$. Die Kernladungszahl ist Z und das Atom enthält nur ein Elektron.

i) Berechnen Sie die Normierungskonstante.

ii) Für den Kern sei $A = 173$, $Z = 70$. Der Radius des Kerns ist näherungsweise gegeben durch $R = 1.2\, A^{1/3}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron im Kern befindet?

14. a) Zeige, dass für ein kugelsymmetrische Potential $V(r)$ gilt

$$\begin{aligned} \left[\hat{H}, \hat{l}^2\right] &= 0 \\ \left[\hat{H}, \hat{l}_z\right] &= 0 \end{aligned}$$

b) Welche Konsequenzen hat die Vertauschbarkeit von $\hat{l}^2$ und $\hat{l}_z$ mit dem Hamilton-Operator für die Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung mit kugelsymmetrischem Potential?

15. a) Betrachten Sie die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} L_+ &= L_x + iL_y \\ L_- &= L_x - iL_y \\ L_+|lm> &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|l, m+1> \\ L_-|lm> &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}|l, m-1> \\ L_z|lm> &= m\hbar|lm> \\ L^2|lm> &= l(l+1)\hbar^2|lm> \end{aligned}$$

Ein System habe den Drehimpuls $l = 1$. Finden Sie die Matrixdarstellungen von L_x, L_y, L_z und L^2 in der Basis der Eigenvektoren von L_z und L^2.

b) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Messung von L_x $-\hbar$, 0, $\hbar$ für ein System mit Drehimpuls 1 ergibt. Das System sei im Zustand $\frac{1}{\sqrt{14}}[|1> +2|0> +3|-1>]$, ausgedrückt in der Basis der Eigenfunktionen von L_z.