Theoretische Physik III für das Lehramt L3, WS2003/04, Prof. H.J. Lüdde

Aufgaben - Kapitel II
Quantenmechanik

1. Ein eindimensionales Wellenpaket besitzt zur Zeit $t = 0$ die Form

$$\psi(x,0) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2\Delta x^2} + ik_0 x} \ .$$

   a) Berechne Dichte
   $$\rho = \psi^* \psi$$
   und Stromdichte
   $$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^* \frac{\partial}{\partial x}\psi - \psi \frac{\partial}{\partial x}\psi^*\right)$$
   des Wellenpaketes und interpretiere das Ergebnis.

   b) Wie muss man den Normierungsfaktor A wählen, wenn $\psi(x,0)$ ein einzelnes freies Teilchen beschreiben soll?

   c) Bestimme die Impulsverteilung des Wellenpaketes und diskutiere an diesem Beispiel die Unschärferelation.

   d) Berechne die Zeitentwicklung des Wellenpaketes und zeige, dass es mit der Zeit zerfließt.

   Hinweis: *Bei Teilaufgabe c) werden Sie auf ein Integral geführt, dass Sie am einfachsten mittels quadratischer Ergänzung des Exponenten und Verwendung des Fehlerintegrals*
   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$
   berechnen können. Das Fehlerintegral und eine geeignete Substitution können auch bei Teilaufgabe b) hilfreich sein.

2. Zeige für den eindimensionalen Fall die Gültigkeit der Ehrenfest'schen Sätze für kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \hat{x} \rangle &= \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_x} \right\rangle = \frac{1}{m}\langle \hat{p}_x \rangle \\ \frac{d}{dt}\langle \hat{p}_x \rangle &= -\left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial x} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial \hat{V}_x}{\partial x} \right\rangle \end{aligned}$$

   mit dem Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}_x^2 + \hat{V}_x \ .$$

3. Normieren Sie die folgenden Wellenfunktionen:

   a) $\psi(\vec{r}) = Ne^{-r/a}$

   b) $\psi(\vec{r}) = Ne^{-(r/a)^2}$

4. Gegeben ist die Wellenfunktion eines Teilchens in einer Dimension zu

$$\psi(x) = Ne^{-x^2} \; .$$

   a) Normieren Sie $\psi(x)$.

   b) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$.

   c) Zeigen Sie, dass gilt

$$[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar \;\; , \;\; [\hat{p}, \hat{x}^n] = -ni\hbar\hat{x}^{n-1} \; (n > 1) \;\; , \;\; \left[\hat{p}, \hat{A}\right] = -i\hbar\frac{d\hat{A}}{dx} \; ,$$

   wobei $\hat{A} = \hat{A}(x)$ eine differenzierbare Funktion von x ist.

5. Betrachten Sie ein Teilchen, das durch die Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$ beschrieben wird und der Schrödinger-Gleichung genügt.

   a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \; ,$$

   mit $\rho(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t)^*\psi(\vec{r}, t)$ und $\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{m}Re\left[\psi\left(\frac{\hbar}{i}\operatorname{grad}\psi\right)\right]$. Interpretieren Sie den Erhaltungssatz! Kennen Sie eine andere Theorie, in der eine Kontinuitätsgleichung gilt?

   b) Betrachten Sie die Wellenfunktion

$$\psi(x, t) = \left[Ae^{ipx/\hbar} + Be^{-ipx/\hbar}\right] e^{-ip^2t/2m\hbar} \; .$$

   Finden Sie den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsstrom und interpretieren Sie ihn.

   c) Zeigen Sie, dass für ein eindimensionales, quadratintegrables Wellenpaket gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} j(x)dx = \frac{\langle p \rangle}{m} \; .$$

6. Zeige: Ein imaginäres Potential $iV(\vec{r})$ in der Schrödinger-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta + iV(\vec{r})\right)\psi(\vec{r}, t) = i\hbar\partial_t\psi(\vec{r}, t)$$

   beschreibt die Anwesenheit von Quellen und Senken der Wahrscheinlichkeit.

7. Berechne die Kommutatoren:

a) $\left[\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}\right]$

b) $\left[\hat{l}_x, \hat{l}_y\right]$

c) $\left[\hat{l}^2, \hat{l}_y\right]$

d) $\left[\hat{l}_y, \frac{1}{r}\right]$

Diskutiere die Ergebnisse.