



Hans Jürgen Lüdde

Klassische Mechanik

luedde@itp.uni-frankfurt.de

Umschlagbild:

Sir Isaac Newton * 25.12.1642 Lincolnshire, † 20.3.1726 Kensington

Joseph-Louis Lagrange * 25.1.1736 Turin, † 10.4.1813 Paris

Sir William Rowan Hamilton * 4.8.1805 Dublin, † 2.12.1865 Dublin

Galileo Galilei * 15.2.1564 Pisa, † 8.1.1642 Arcetri

Vorwort

Mit Newton's *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, die 1687 veröffentlicht wurde, begann die Geschichte der Theoretischen Physik und der sich daraus entwickelnden mathematischen Naturwissenschaften mit dem Ziel einer quantitativen Beschreibung von Naturphänomenen auf der Basis exakter mathematischer Gesetzmäßigkeiten.

Vorausgegangen war eine intellektuelle Aufbruchstimmung in allen Bereichen der Gesellschaft, die, trotz immer wieder versuchter Unterdrückung durch die 'heilige' Inquisition, den Nährboden für die Grundlagen der modernen Naturwissenschaften bot. Parallel und scheinbar unabhängig voneinander entwickelten sich zwei Gebiete der Mechanik: (i) die terrestrische Mechanik, in der Galilei erstmals mit Hilfe kontrollierter Experimente zum Fallgesetz einfache Bewegungsabläufe erklärte und (ii) die Himmelsmechanik, die basierend auf den Beobachtungen von Tycho Brahe durch die Kepler'schen Gesetze hervorragend beschrieben wurde.

Newton's große Leistung war u.a. die Erkenntnis, dass die Mechanik auf der Erde und im Universum den selben Naturgesetzen genügt: so stellt das Newton'sche Gravitationsgesetz die erste Vereinheitlichungstheorie in der Geschichte der Physik dar. Die mathematische Formulierung der Grundlagen der Mechanik in Form der drei Newton'schen Gesetze hat auch in der modernen Physik nicht an Bedeutung verloren. Zwar wissen wir heute, dass wir einschränkende Bedingungen für deren Gültigkeit formulieren müssen, aber im Rahmen dieser Einschränkungen beschreiben die einfachen Gesetze eine gewaltige Zahl hoch komplexer Bewegungsvorgänge in der Natur.

Später wurde die Mechanik aus einer abstrakteren Sicht durch Lagrange und Hamilton neu formuliert. Die analytische Mechanik ermöglicht Symmetrien und Zwangsbedingungen, direkt in Form von sogenannten generalisierten Koordinaten in den Formalismus aufzunehmen.

Die Sprache der Theoretischen Physik ist die Mathematik. So wie eine vernünftige Konversation innerhalb einer Sprache die Kenntnis deren Grammatik und Grundwortschatz benötigt, werden in diesem Skript Grundkenntnisse der Mathematik (Analysis und Lineare Algebra) vorausgesetzt.

Inhaltsverzeichnis

1	Newtons Gesetze	1
1.1	Was beschreibt die Mechanik ?	1
1.2	Eine kurze Entwicklungsgeschichte der theoretischen Mechanik	1
1.3	Die Synthese: Newtons Gesetze	3
1.3.1	Kinematische Größen	3
1.3.2	Maßsysteme	4
1.3.3	Newtons Gesetze (moderne Formulierung)	5
1.4	Wie definiert man eine Masse?	7
1.5	Inertiale und beschleunigte Bezugssysteme	8
1.6	Beispiele	10
2	Bewegung in einer Dimension	13
2.1	Konstante Kräfte	13
2.1.1	Lösung der Bewegungsgleichung	13
2.1.2	Arbeit und Energie bei konstanter Kraft	18
2.1.3	Impuls und Leistung bei konstanter Kraft	20
2.2	Ortsabhängige Kräfte	20
2.2.1	Potentiale	22
2.2.2	Massenpunkte in der Nähe eines stabilen Gleichgewichtes	24
2.3	Geschwindigkeitsabhängige Kräfte	24
3	Oszillatoren	27
3.1	Der reibungsfreie harmonische Oszillator	29
3.2	Energie des freien harmonischen Oszillators	32
3.3	Gedämpfter harmonischer Oszillator	33
3.4	Der Phasenraum	38
3.5	Der getriebene Oszillator	39
3.6	Gekoppelte Oszillatoren	41
3.7	Nichtlineare Oszillatoren	43
3.8	Das freie mathematische Pendel	45
3.9	Das getriebene mathematische Pendel - chaotische Bewegungsformen	48
4	Bewegung zweier Massenpunkte	55
4.1	Der Schwerpunkt - Bewegung des Systems	56
4.2	Die Relativkoordinate - Interne Bewegung der Massenpunkte	57

4.3	Stöße	58
4.3.1	Elastische Stöße	58
4.3.2	Inelastische Stöße	62
4.4	Schwerpunkt- und Relativkoordinaten eines Systems mit N Massenpunkten	63
4.5	Bewegung einer Rakete	65
5	Bewegung in 3 Dimensionen - das Keplerproblem	67
5.1	Arbeit und Energie in 3 Dimensionen	67
5.2	Drehmoment und Drehimpuls	70
5.3	Zentralkräfte	72
5.4	Planetenbewegung als Einkörperproblem	72
6	Beschleunigte Bezugssysteme	79
6.1	Beschleunigte Bezugssysteme	79
6.2	Scheinkräfte auf der Erdoberfläche	82
6.2.1	Die Zentrifugalkraft	82
6.2.2	Die Corioliskraft	84
6.3	Gezeitenkräfte	87
7	Bewegung starrer Körper	93
7.1	Die kinetische Energie und der Trägheitstensor	93
7.2	Berechnung von Trägheitsmomenten	95
7.2.1	Das Parallelachsen-Theorem: Satz von Steiner (1796-1863)	95
7.2.2	Trägheitsmoment einfacher starrer Körper	97
7.3	Der Drehimpuls - Bewegungsgleichung eines starren Körpers	102
7.4	Hauptachsentransformation	104
7.5	Beispiele	105
8	Einführung in die analytische Mechanik	113
8.1	Hamilton's Prinzip	114
8.1.1	Variationsrechnung	115
8.2	Lagrange-Gleichungen	116
8.2.1	Generalisierte Koordinaten	118
8.2.2	Beispiele	121
8.3	Kanonische Bewegungsgleichung - Hamiltons Formulierung	123
8.3.1	Poissonklammern - die systematische Suche nach Erhaltungsgröße .	125
8.3.2	Bewegung eines Satelliten im System Erde-Mond	126

Kapitel 1

Newtons Gesetze

1.1 Was beschreibt die Mechanik ?

Die klassische Mechanik beschreibt die Bewegung von Körpern aufgrund äußerer Kräfte. Dabei wird nicht nach der Natur der Kräfte gefragt: Die Mechanik akzeptiert Kräfte als vorgegeben und beschäftigt sich nur mit den Auswirkungen der Kräfte auf (in der Regel) strukturlose Teilchen. Diese strukturlosen Körper werden zusätzlich idealisiert als Punktteilchen (Massenpunkte oder Punktladungen) ohne innere Freiheitsgrade und ohne Ausdehnung. Darüberhinaus werden wir aber auch Situationen kennen lernen, in denen das Konzept der Punktteilchen nicht mehr adäquat ist. Z.B. die Bewegung starrer Körper setzt voraus, dass wir etwas über die Massenverteilung und Geometrie eines ausgedehnten Objektes wissen.

Zunächst wollen wir jedoch die Bewegung einzelner oder Systeme von Massenpunkten unter verschiedenen Gesichtspunkten untersuchen:

- (i) Kinematik: Beschreibung der Bewegung durch die Trajektorie ("Flugbahn") eines Massenpunktes (in der Regel als Lösung einer Bewegungsgleichung) mit der Fragestellung: "Wie bewegt sich ein Körper?"
- (ii) Dynamik: Bezug zwischen der Änderung einer Bewegung und den angreifenden Kräften: "Warum bewegt sich ein Körper?"

1.2 Eine kurze Entwicklungsgeschichte der theoretischen Mechanik

Das ausgehende Mittelalter und damit der Beginn der Neuzeit waren ganz wesentlich durch ein revolutionär neues Bild der Natur geprägt. Es war für viele ein persönlich schmerzlicher Weg vom kirchlichen Edikt des geozentrischen Weltbildes zum Verdikt der Naturbeobachtung: erstmals wurden objektivierbare Naturgesetze formuliert im Widerspruch zu kirchlichen Glaubensgrundsätzen. Die Entwicklung der Mechanik zur ersten exakten Naturwissenschaft, deren Gültigkeit ausschließlich auf Naturbeobachtung gründet, wurde durch die Arbeiten von Galileo Galilei (1564 - 1642) einerseits und Nicolas Copernicus (1473 - 1543), Tycho Brahe (1546 - 1601), sowie Johannes Kepler (1571 - 1630)

andererseits vorangetrieben. Dabei setzte sich Galilei vornehmlich mit der systematischen Untersuchung von Bewegungsabläufen auf der Erde auseinander: seine ersten kontrollierten Experimente zum Fallgesetz markieren den Beginn der Naturwissenschaften. Seine Experimente lassen sich in den folgenden Aussagen zusammenfassen

- (i) Inertialbewegung: ein kräftefreier Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit oder befindet sich in Ruhe
- (ii) Fallgesetz: ein reibungsfreier Körper fällt mit der Beschleunigung $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ nach dem Weg-Zeit-Gesetz

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

Parallel zur Mechanik auf der Erdoberfläche entwickelte sich die Himmelsmechanik mit den Beobachtungen zum heliozentrischen Weltbild (Copernicus) und zur Bewegung der Planeten (Brahe). Diese Beobachtungsdaten mündeten in die drei Keplerschen Gesetze

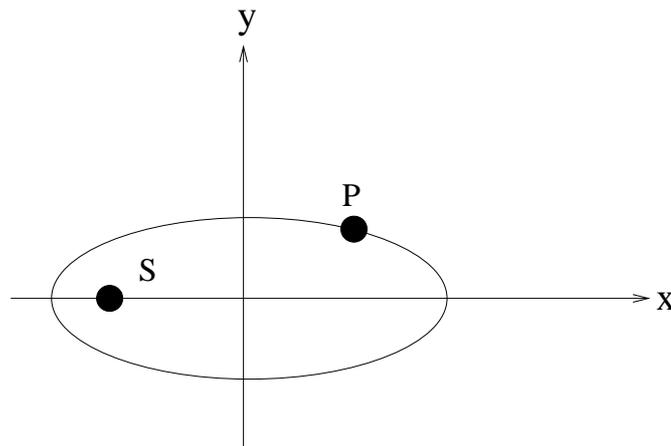


Abb. 1.1: Zum 1. Keplerschen Gesetz

- (1) Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen um die Sonne, die sich im Brennpunkt der Ellipse befindet
- (2) Die Verbindungsachse Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
- (3) Für die Bewegung aller Planeten gilt

$$\frac{a^3}{T^2} = const ,$$

wobei a die große Halbachse und T die Umlaufzeit bedeuten.

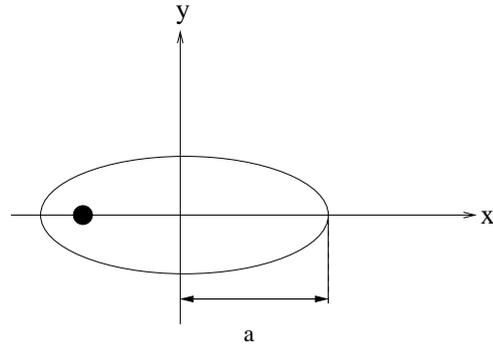
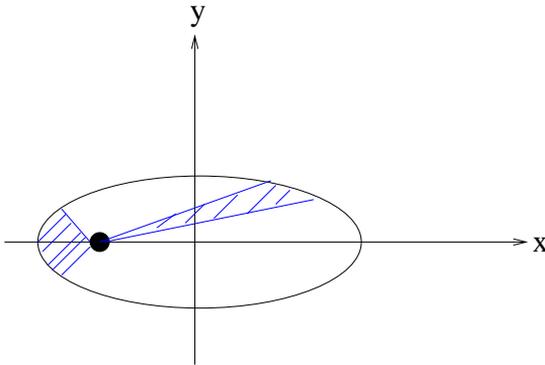


Abb. 1.2: Zum 2. Keplerschen Gesetz

Abb. 1.3: Große Halbachse a einer Ellipse

1.3 Die Synthese: Newtons Gesetze

Zunächst hat sich die Mechanik in die erdgebundene - und Himmelsmechanik unabhängig voneinander entwickelt. Die bedeutende Leistung von Sir Isaac Newton war die Erkenntnis, dass die Bewegungsabläufe auf der Erde den gleichen Naturgesetzen unterworfen sind wie auch die Bewegung aller Himmelskörper. Diese erste Vereinheitlichungstheorie, die Newton 1687 in seiner "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" veröffentlichte, kann man als den Beginn der theoretischen Physik (und damit als Ursprung aller theoretischen Naturwissenschaften) bewerten. Dabei bleibt die Physik, trotz des mathematischen Beschreibungswerkzeuges, eine induktive Wissenschaft: jedes auch theoretisch abgeleitete Naturgesetz bedarf der Bestätigung durch das Experiment. (Im Gegensatz dazu ist die Mathematik eine deduktive Wissenschaft: Sie leitet sich aus Axiomen ab). Zur Formulierung von Newtons Gesetzen bedarf es zunächst einiger Vorbemerkungen.

1.3.1 Kinematische Größen

Zur quantitativen Beschreibung einer Bewegung benötigen wir die kinematischen Größen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Massenpunktes zu einer beliebigen Zeit t

- Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

- Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

\vec{v} zeigt immer in die Bewegungsrichtung.

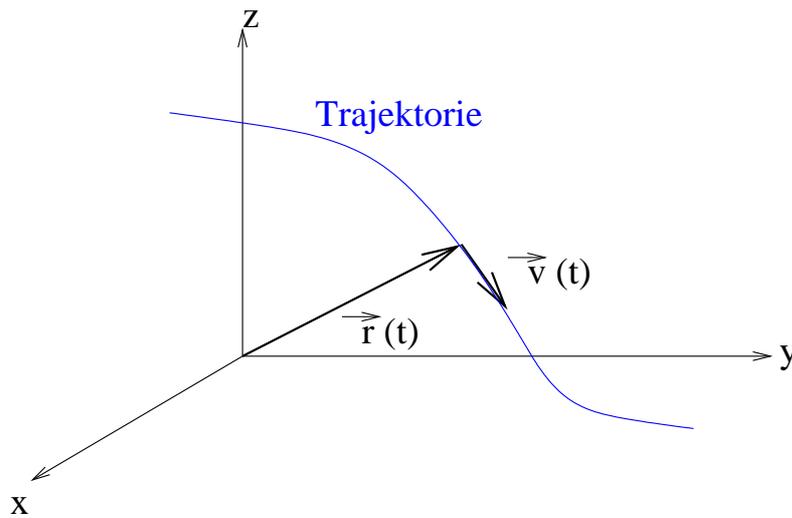


Abb. 1.4: Kinematische Größen

- Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$$

$\vec{r}(t)$ und $\vec{v}(t)$ bestimmen vollständig die Trajektorie eines Massenpunktes, wenn die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ bekannt ist.

1.3.2 Maßsysteme

Damit wir eine vernünftige "Skalierung" der kinematischen Größen vornehmen können, benötigen wir ein einheitliches Maßsystem. Das international anerkannte System ist das *Système Internationale (SI)*, das seit der "Meterkonvention" von 1875 die mechanischen Basisgrößen Länge, Masse und Zeit definiert. Die zur Zeit gültige Maßkonvention ist in folgender Tabelle zusammengestellt:

Basisgröße	Basiseinheit	Definition	Fundamentalkonstante
Länge	Meter (m)	Strecke, die das Licht im Vakuum in $\frac{1}{299792458}$ Sekunde durchläuft	Lichtgeschwindigkeit c
Masse	Kilogramm (kg)	Internationaler Prototyp	noch keine
Zeit	Sekunde (s)	1 s entspricht dem 9192631770 fachen der Periodendauer des Übergangs zwischen Hyperfeinstrukturzuständen des Atoms ^{133}Cs	Eigenschaft des Cs-Atoms

Tabelle 1.1 Maßsystem SI für die Basisgrößen der Mechanik

In der modernen Metrologie wird versucht, jede Basigröße mit einer physikalischen Fundamentalkonstante zu verbinden und somit ein universell gültiges Maßsystem zu definieren. Das für Deutschland zuständige Metrologiezentrum ist die Physikalisch-Technische Bundesanstalt in Braunschweig.

1.3.3 Newtons Gesetze (moderne Formulierung)

Nachdem wir kinematische Größen für die Bewegung eines Massenpunktes definiert und über ein geeignetes Maßsystem skaliert haben, können wir jetzt Newtons Gesetze formulieren

- (1) Ein Körper ist in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, wenn keine Kraft auf ihn wirkt

$$\vec{F} = 0 \leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = 0$$

- (2) Die zeitliche Änderung des Impulses (der Impuls ist $\vec{p} = m\vec{v}$) eines Körpers ist gleich der auf den Körper wirkenden Kraft

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v})$$

- (3) Zwei Körper üben aufeinander betragsmäßig gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte aus (actio gleich reactio). Bezeichnet man mit \vec{F}_{12} die Kraft von Masse 2 auf Masse 1 und mit \vec{F}_{21} die entsprechend umgekehrte Situation, so gilt

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

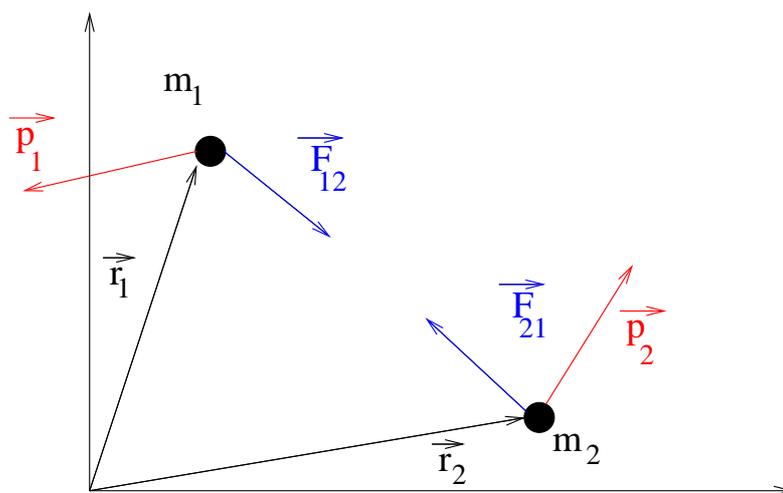


Abb. 1.5: actio = reactio

Diese drei Gesetze sind ausreichend zum Verständnis der klassischen Mechanik: sie beschreiben Bewegungabläufe auf der Erde, im Sonnensystem oder die Dynamik von Galaxien. Allerdings werden wir später einschränkende Bedingungen formulieren. Vereinfacht ausgedrückt lauten die Einschränkungen: Newtons Gesetze gelten für Systeme, die (i) sich deutlich langsamer bewegen als das Licht im Vakuum und (ii) makroskopisch sind.

Bemerkungen:

- (i) Newtons Synthese besteht in der Abstraktion, dass die Gesetzmäßigkeiten für die Bewegung von Körpern auf der Erde dieselben sind wie im Weltraum.
- (ii) Das erste Gesetz besagt, dass eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit der natürliche Zustand eines kräftefreien Körpers ist. Da wir prinzipiell kein absolutes Bezugssystem festlegen können, erlaubt uns das erste Gesetz, jedes beliebige System, das sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt -Inertialsystem- zu wählen: jedes Inertialsystem ist gleichwertig zur Beschreibung physikalischer Vorgänge (Relativitätsprinzip).
- (iii) Aus dem zweiten Gesetz folgt für zeitlich konstante Massen

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = m\frac{d}{dt}\vec{v} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$$

Da \vec{F} in der Regel von \vec{r} , $\dot{\vec{r}}$ und t abhängt, haben wir eine Bewegungsgleichung für ein klassisches System

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Dabei handelt es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung zur Bestimmung von Ort $\vec{r}(t)$ und Impuls $\vec{p}(t)$ eines Systems. Wir müssen die wirkenden Kräfte und den Anfangszustand des Systems kennen ($\vec{r}(0) = \vec{r}_0, \vec{v}(0) = \vec{v}_0$), alles andere wird durch die Bewegungsgleichung eindeutig festgelegt.

- (iv) Eine Konsequenz des dritten Gesetzes ist die Impulserhaltung eines abgeschlossenen Systems von Massenpunkten. Darunter versteht man ein System, auf das keine äußeren Kräfte wirken. Für zwei Massenpunkte gilt für deren Summenimpuls $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \stackrel{(2)}{=} \vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} \stackrel{(3)}{=} \vec{F}_{12} - \vec{F}_{12} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const$$

Die entsprechende Erweiterung für N Massenpunkte ist analog

$$\sum_{j=1}^N \vec{p}_j = const$$

Der Gesamtimpuls eines Systems von Massenpunkten ist zu allen Zeiten gleich und somit eine Erhaltungsgröße, wenn nur innere Kräfte zwischen den Massenpunkten und keine äußeren Kräfte auf das System einwirken.

- (v) Was ist also eine Kraft? Darauf gibt uns die Mechanik keine Antwort.
Wie erfahren wir eine Kraft? Z.B. in Form von Newtons Gravitationsgesetz (Details später)

$$\vec{F} = -\gamma \frac{M \cdot m \vec{r}}{r^2 r} .$$

Es gilt für den fallenden Apfel (M: Masse der Erde, m: Masse des Apfels) wie auch für die Bewegung der Planeten (M: Masse der Sonne, m: z.B. Masse der Erde).

Was bewirkt die Kraft? Nach dem zweiten Gesetz bewirkt sie eine Impulsänderung und somit eine beschleunigte Bewegung

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} .$$

1.4 Wie definiert man eine Masse?

Wenn man die Kraft auf einen Massenpunkt kennt, müsste man im Umkehrschluss eine Aussage über den uns bisher fremden Begriff der Masse machen können. Bisher haben wir zwei Kraftgesetze kennen gelernt:

- (i) Newtons zweites Gesetz erlaubt es uns, eine Masse über ihre Bewegung zu verstehen

$$m_a = \frac{F}{a} .$$

- (ii) Das Gravitationsgesetz hingegen beschreibt eine Masse in ihrem Ruhezustand

$$m_G = -\frac{F \cdot r^2}{\gamma M} .$$

Sind die beiden Massen m_a (träge Masse) und m_G (schwere Masse) eines Massenpunktes verschieden ? Dazu betrachten wir zwei Massenpunkte im Schwerfeld der Erde (Masse M). Durch die Gravitationskraft werden beide Massenpunkte beschleunigt und es gilt am selben Ort

$$\text{MP1} : -\gamma \frac{M m_G^{(1)}}{r^2} = m_a^{(1)} \cdot a_1$$

$$\text{MP2} : -\gamma \frac{M m_G^{(2)}}{r^2} = m_a^{(2)} \cdot a_2$$

für das Verhältnis der Beschleunigungen

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_G^{(1)} m_a^{(2)}}{m_G^{(2)} m_a^{(1)}} .$$

Welcher Massenpunkt wird schneller auf die Erde fallen: eine Bleikugel (MP1) oder eine Holzkugel (MP1) beide mit dem Radius 0.1m?

In Erweiterung des Galileischen Experimentes findet man für Fallversuche im Vakuum

$$\frac{a_1}{a_2} = 1 \pm 10^{-12} ,$$

d.h. Blei- und Holzkugel erreichen im Rahmen unserer modernen Messgenauigkeit gleichzeitig den Boden. D.h.

$$\frac{m_G^{(1)}}{m_a^{(1)}} \cdot \frac{m_a^{(2)}}{m_G^{(2)}} = 1 \Leftrightarrow \frac{m_G^{(1)}}{m_a^{(1)}} = \frac{m_G^{(2)}}{m_a^{(2)}} = \text{const}$$

aus den Fallversuchen folgt, dass das Verhältnis von schwerer zu träger Masse für alle Körper identisch ist! Skaliert man die Einheiten so, dass $\text{const} = 1$ für alle Massen, so gilt

$$m_G = m_a = m .$$

Damit ergibt sich als Einheit für die Kraft (N: Newton)

$$F[N] = -\gamma \frac{Mm}{r^2} [N] = m \cdot a \left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$N = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$$

und wiederum experimentell findet man für die Gravitationskonstante γ

$$\gamma = 6.668 \cdot 10^{-11} \left[\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \right] .$$

1.5 Inertiale und beschleunigte Bezugssysteme

Stellen Sie sich vor, Sie wollen einen Becher Kaffee trinken und versuchen dies unter den Bedingungen a)-c), die in Abbildung 1.6 dargestellt sind: a) Sie befinden sich in Ruhe, b) Sie fahren mit konstanter Geschwindigkeit und c) jemand fährt Sie mit seinem sportlichen Fahrstil auf einer kurvenreichen Strecke.

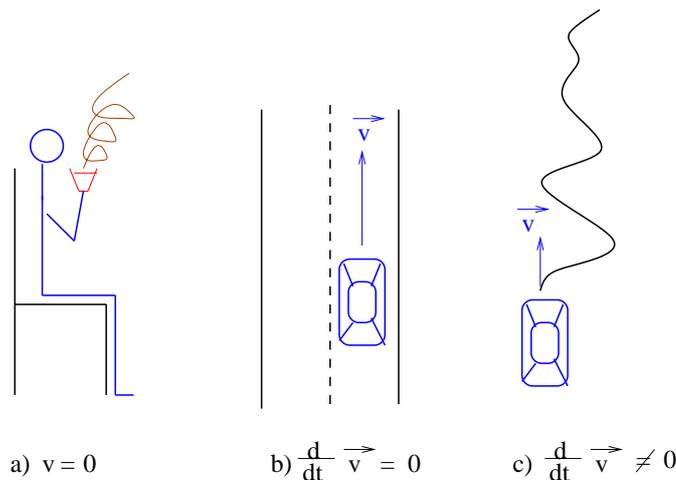


Abb. 1.6: Inertiale und beschleunigte Bezugssysteme

Was passiert? a) und b) Sie trinken in Ruhe Ihren Kaffee, c) Sie trinken keinen Tropfen, müssen sich aber nach der 4. Kurve umziehen.

In den Situationen a) und b) "erleben" Sie Inertialsysteme. Sie sind vollständig gleichwertig zur Beschreibung physikalischer Vorgänge: es wirken nur die wahren Kräfte (hier die erdnahe Gravitation). Das Auto in c) bildet ein beschleunigtes Bezugssystem: neben den wahren Kräften treten Scheinkräfte auf, die immer entgegen der Beschleunigungsrichtung wirken.

B1.1 Simulation der Schwerelosigkeit im Sturzflug.

Um Astronauten unter den Bedingungen der Schwerelosigkeit zu trainieren, stellen NASA und ESA Großraumflugzeuge zur Verfügung, die aus großer Höhe auf einer parabolischen Flugbahn (Wurfparabel) für einige Sekunden zur Erde stürzen. Die Gravitation in Erdnähe ist nahezu konstant und es gilt

$$F_G = -mg$$

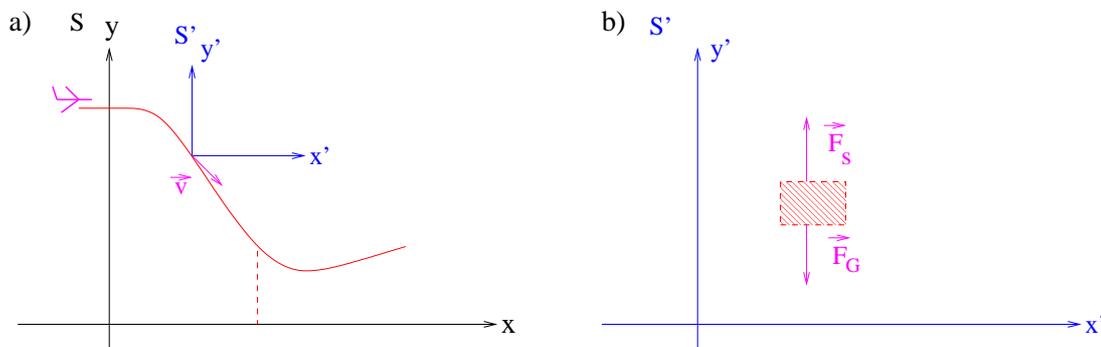


Abb. 1.7: Simulation der Schwerelosigkeit in einem frei fallenden beschleunigten Bezugssystem S' . a) Flugbahn im Inertialsystem S b) Wahre – (F_G) und Scheinkräfte (F_S) im beschleunigten System S' .

Die Scheinkraft, die durch die mit der Erdbeschleunigung g frei fallenden Flugkabine S' hervorgerufen wird, ist der Bewegungsrichtung entgegengesetzt, also

$$F_S = mg .$$

Die bezogen auf S' an einem beliebigen Körper wirkende Gesamtkraft ist somit

$$\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_S = (-mg + mg) \cdot \vec{e}_y = 0 ,$$

der Körper relativ zur Flugkabine damit schwerelos.

1.6 Beispiele

B1.2: Berechnen Sie die Beschleunigung auf der Oberfläche der Erde unter der Voraussetzung, dass die Masse der Erde homogen und kugelförmig verteilt ist (R: Erdradius).

$$F = \left| \vec{F} \right| = \gamma \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot g$$

$$\Rightarrow g = \gamma \frac{M}{R^2} .$$

Mit $R = 6.37 \cdot 10^6 m$ und $M = 5.98 \cdot 10^{24} kg$ ergibt sich

$$g = 6.668 \cdot 10^{-11} \frac{5.98 \cdot 10^{24}}{(6.37)^2 \cdot 10^{12}} \left[N \frac{m^2}{kg^2} \frac{kg}{m^2} \right] \approx 9.8 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

B1.3: Wie groß ist g auf der Mond-, Mars- oder Jupiter-Oberfläche?

	R [m]	M [kg]	g [m/s ²]
Mond	$1.72 \cdot 10^6$	$7.35 \cdot 10^{22}$	1.6
Mars	$3.39 \cdot 10^6$	$6.42 \cdot 10^{23}$	3.7
Jupiter	$7.13 \cdot 10^7$	$1.90 \cdot 10^{27}$	24.9

Tabelle 1.2 Zum Vergleich von Gravitationsbeschleunigungen

Während unser Gewicht (mg) auf dem Mond nur ca. $\frac{1}{6}$ des Gewichtes auf der Erde beträgt, würden wir auf dem Jupiter mit dem 2.5 fachen Gewicht hart gepufft.

B1.4: Betrachten Sie einen Massenpunkt auf einer Kreisbahn mit Winkelgeschwindigkeit ω . Der Ortsvektor des Massenpunktes lässt sich in Parameterdarstellung angeben

$$\vec{r}(t) = r \cos \omega t \cdot \vec{e}_x + r \sin \omega t \cdot \vec{e}_y .$$

Berechnen Sie $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$. Die Geschwindigkeit des Massenpunktes erhalten wir durch Differentiation des Ortsvektors nach der Zeit

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = -r\omega \sin \omega t \vec{e}_x + r\omega \cos \omega t \vec{e}_y$$

Den Betrag der Geschwindigkeit erhalten wir nach Pythagoras aus der x- und y-Komponente

$$|\vec{v}(t)| = [v_x^2 + v_y^2]^{\frac{1}{2}} = [r^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + r^2 \omega^2 \cos^2 \omega t]^{\frac{1}{2}}$$

$$= r\omega [\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t]^{\frac{1}{2}} = r\omega .$$

Die Richtung von \vec{v} steht immer senkrecht auf \vec{r} , wie man mit Hilfe des Skalarprodukts nachweisen kann (zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet). Das Skalarprodukt von \vec{a} und \vec{b} berechnet sich nach der Regel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

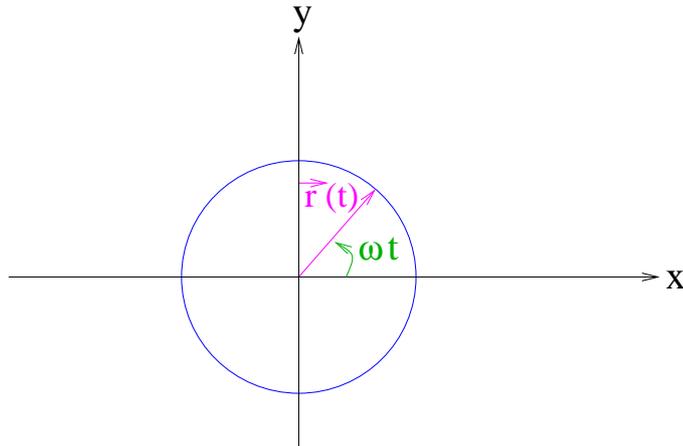


Abb. 1.8: Kreisbahn

$\cos(\vec{a}, \vec{b})$ ist der zwischen \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel.
Damit ergibt sich

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = -r^2 \omega \cos \omega t \sin \omega t + r^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t = 0 .$$

Für die Beschleunigung gilt

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \dot{\vec{v}}(t) = -r\omega^2 \cos \omega t \vec{e}_x - r\omega^2 \sin \omega t \vec{e}_y \\ &= -\omega^2 \cdot \vec{r}(t) \\ a(t) &= |\vec{a}(t)| = r\omega^2 = \frac{r^2 \omega^2}{r} = \frac{v^2}{r} . \end{aligned}$$

Die Beschleunigung auf einer Kreisbahn ist dem Ortsvektor entgegen- und auf das Kraftzentrum hin gerichtet.

B1.5: Ein Kommunikationssatellit bewege sich synchron zur Erde in der Äquatorebene. Wie weit muss der Satellit von der Erdoberfläche entfernt sein, damit er geostationär ist ?

Der Satellit bewegt sich auf einer Kreisbahn um die Erde. Die Bewegungsgleichung des Satelliten ist

$$m\ddot{r} = ma = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

Für die Kreisbahn haben wir im vorigen Beispiel gefunden

$$a = r\omega^2$$

Kreisfrequenz ω und Umlaufzeit T sind durch $\omega = \frac{2\pi}{T}$ verknüpft, so dass wir erhalten

$$\begin{aligned} a &= \frac{4\pi^2 r}{T^2} \\ \Rightarrow r^3 &= \frac{\gamma M T^2}{4\pi^2} \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass wir beiläufig das 3. Keplersche Gesetz erhalten haben

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2} .$$

Somit ergibt sich bei einer Umlaufzeit $T = 24h = 86400s$ (geostationär bedeutet, dass der Satellit immer über dem selben Punkt der Erdoberfläche "steht")

$$r = 4.22 \cdot 10^7 m .$$

Dies ist der Abstand zum Erdmittelpunkt. Die Höhe des Satelliten bezogen auf die Erdoberfläche ist dann

$$h = r - R = 35.8 \cdot 10^6 m = 35800 km .$$

B1.6: Ein Kind wirbelt ein Seil der Länge l an dessen Ende eine Masse m befestigt ist horizontal über seinem Kopf. Die Umlaufzeit der Masse betrage T Sekunden. Bestimmen Sie für $l = 2m, m = 0.2kg$ und $T = 0.4s$ a) die Scheinkraft entlang des Seils und b) mit welcher Geschwindigkeit die Masse tangential wegfliegen würde, falls das Seil reißt.

Zu a)

$$\left| \vec{F} \right| = F = m \cdot a = m \frac{4\pi^2 r}{T^2} \approx 98.7 N$$

Dazu im Vergleich die Gravitationskraft

$$F_G = m \cdot g \approx 2 N$$

Zu b) Für die Kreisbahn gilt $v = \omega r$ und somit

$$v = \frac{2\pi}{T} \cdot r \approx 31.4 \frac{m}{s} \approx 113 \frac{km}{h} .$$

Kapitel 2

Bewegung in einer Dimension

Das Ziel der theoretischen Mechanik ist die mathematische Beschreibung der Bewegung eines Körpers als Reaktion auf angreifende Kräfte. Eine "Rezeptur" zur systematischen Lösung dieser Aufgabe wird durch die Newtonschen Gesetze vorgegeben:

- (1) 1. Gesetz zur Wahl eines mathematisch bequemen Bezugssystems (Beispiel: waagrechtlicher Wurf)
- (2) Identifikation wirksamer Kräfte (Beispiel: schiefe Ebene)
- (3) 2. Gesetz zur Aufstellung der Bewegungsgleichung

$$\frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \ddot{\vec{r}} \quad (2.1)$$

Der Aufwand, der mit der schrittweisen Analyse eines konkreten Problems verbunden ist, hängt natürlich von der Aufgabenstellung ab. In jedem Fall ist am Ende immer die Bewegungsgleichung des mechanischen Systems zu lösen, so dass eine sorgsame Bearbeitung der Schritte (1) und (2) eine wesentliche Arbeitserleichterung darstellen. In der Regel sind die angreifenden Kräfte

- ortsabhängig und über die Koordinate $\vec{r}(t)$ auch implizit zeitabhängig
- geschwindigkeitsabhängig (z. B. Reibungskräfte)
- explizit zeitabhängig

In diesem Abschnitt werden wir verschiedene Klassen von eindimensionalen Bewegungsproblemen diskutieren.

2.1 Konstante Kräfte

2.1.1 Lösung der Bewegungsgleichung

Wir haben gesehen, dass die Gravitationskraft in Erdnähe nahezu konstant ist $|\vec{F}| = -mg$, so dass alle Massenpunkte die gleiche Beschleunigung $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ in Richtung zum Mittelpunkt der Erde erfahren. Wir werden in Kapitel 6 sehen, dass diese Aussage kleiner

Korrekturen bedarf, weil insbesondere durch die Rotation der Erde der Globus ellip-tisch verformt ist. Diese Korrekturen sind gering, so dass wir für den Moment annehmen können, dass die reibungsfreie Bewegung aller Massen in Erdnähe durch die Wirkung einer konstanten Kraft hervorgerufen wird.

In diesem Fall lässt sich die Bewegungsgleichung $\ddot{x} = \frac{F}{m} = a$ direkt integrieren. Da die Beschleunigung a konstant ist gilt

$$\ddot{x} = \dot{v} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a \quad \Bigg| \int_0^t$$

$$\int_0^t \frac{dv}{dt'} dt' = \int_0^t a dt'$$

$$v(t) - v(0) = at$$

mit der Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = v_0$ das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz

$$v(t) = v_0 + at \quad (2.2)$$

Das Weg-Zeit-Gesetz erhält man bei nochmaliger Integration über die Zeit nach dem gleichen Schema

$$\dot{x} = v_0 + at \quad \Bigg| \int_0^t$$

$$x(t) - x(0) = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2.3)$$

Bemerkungen

- (i) Jede Integration ergibt eine Integrationskonstante. D.h. $x(t, x_0, v_0)$ ist somit eine Lösungsschar, abhängig von x_0 und v_0 . Diese Lösungsschar stellt zunächst die mathematisch allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (oder allgemeiner einer Differentialgleichung 2. Ordnung) dar.
- (ii) Jede spezielle physikalische Situation erfordert die Festlegung der Integrationskonstanten durch die Anfangsbedingungen $x_0 \equiv x(0), v_0 \equiv v(0)$ der Bewegung.

Beispiele:

Die Beispiele werden zeigen, dass wir mit der selben allgemeinen Lösung ganz unterschiedliche Bewegungsformen im erdnahen Gravitationsfeld beschreiben können.

B2.1 Freier Fall ohne Reibung

Abbildung 2.1 zeigt Stroboskopaufnahmen eines Massenpunktes, der aus der Höhe y_0 und aus der Ruhe unter dem Einfluss der Gravitation reibungsfrei zu Boden ($y = 0$) fällt.

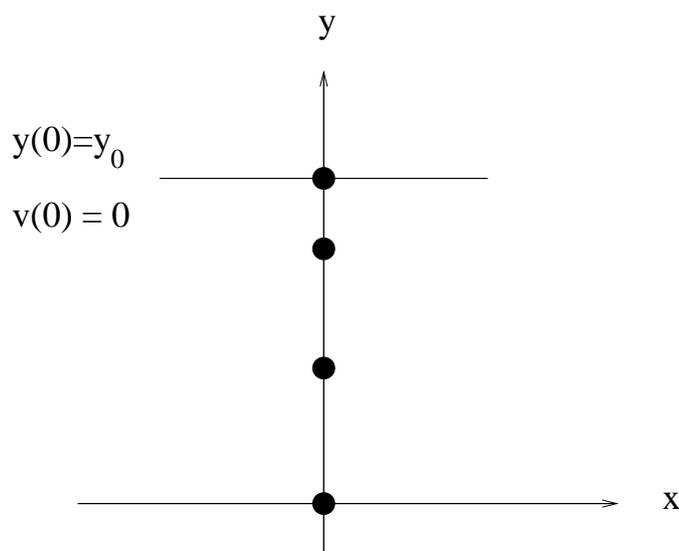


Abb. 2.1: Stroboskopansicht für den freien Fall

In gleichen Zeiteinheiten (Stroboskopintervallen) legt der Massenpunkt immer größere Strecken zurück. Aus (2.2), (2.3) erhalten wir für die speziellen Anfangsbedingungen

$$v(t) = -gt$$

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Daraus lassen sich z. B. die Auftreffzeit t_f

$$y(t_f) = 0 = y_0 - \frac{1}{2}gt_f^2$$

$$t_f = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

und die Auftreffgeschwindigkeit

$$v(t_f) = -gt_f$$

$$= -\sqrt{2gy_0}$$

berechnen. (Beachte: die Auftreffgeschwindigkeit ist unabhängig von der Masse.)

B2.2 Waagrechter Wurf ohne Reibung Warum ist das offensichtlich zweidimensionale Wurfproblem eigentlich doch nur eindimensional? Im ersten Schritt der eingangs erwähnten "Analyse-Rezeptur" wählen wir ein Inertialsystem, das sich mit der Geschwindigkeit v_0 relativ zu S bewegt und betrachten relativ zu diesem bewegten Bezugssystem S' das Wurfproblem: der Massenpunkt bewegt sich offenbar entlang der neuen y' -Achse in freiem Fall.

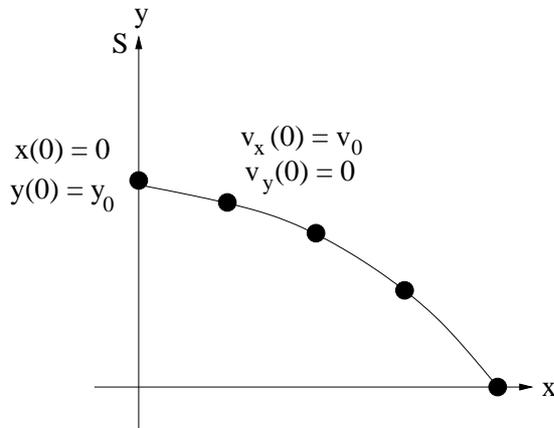
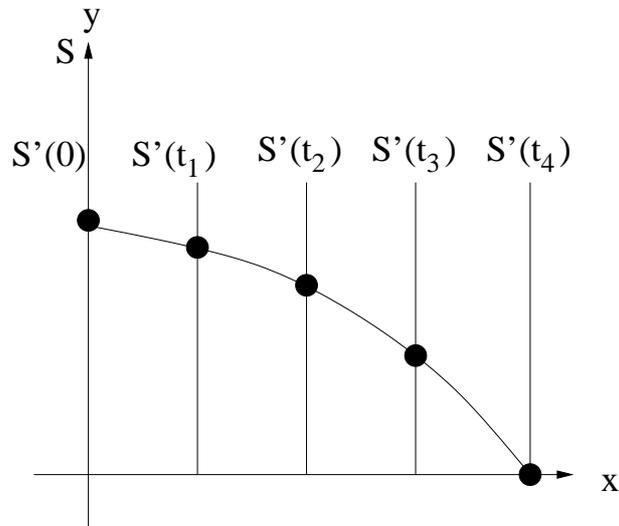


Abb. 2.2: Waagrechter Wurf

Abb. 2.3: Der waagrechte Wurf in S' erscheint als freier Fall.

D. h. wir können den waagrechten Wurf durch eine geschickte Wahl des Bezugssystems auf den freien Fall zurückführen. Mathematisch ist der Zusammenhang zwischen S und S'

$$\begin{aligned}y(t) &= y'(t) \\x(t) &= x'(t) + v_0 t\end{aligned}$$

In S' beobachtet man einen freien Fall

$$\begin{aligned}x'(t) &= 0 \\y'(t) &= y_0 - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

und in S den waagrechten Wurf

$$\begin{aligned}x(t) &= x'(t) + v_0 t = v_0 t \\y(t) &= y'(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

Kontrollfrage:

Eine Gewehrkugel wird aus der Höhe h waagrecht abgeschossen. Gleichzeitig lässt man ein schweres Bleigewicht aus derselben Höhe frei fallen. Beide Objekte bewegen sich reibungsfrei. Welches Objekt berührt zuerst den Boden?

- A) die Gewehrkugel
- B) das Bleigewicht
- C) beide Objekte berühren gleichzeitig den Boden
- D) weiß nicht .

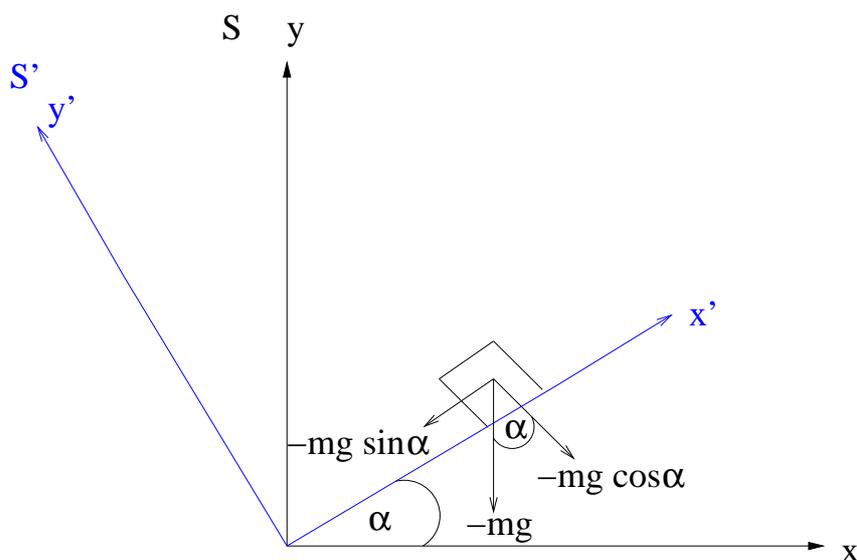


Abb. 2.4: Gleitende Bewegung entlang einer schiefen Ebene.

B2.3 Schiefe Ebene

Eine Masse m rutscht reibungsfrei entlang einer schiefen Ebene. Entsprechend unserem "Rezept" suchen wir zunächst nach der Kraft, die diese Bewegung verursacht. Die Kraftkomponente der Schwerkraft senkrecht zur Ebene wird von den Materialkräften innerhalb der Ebene kompensiert. Man nennt solche Kräfte Zwangskräfte. Sie sorgen dafür, dass der Massenpunkt die Ebene nicht verlassen kann, tragen aber nicht zur Bewegung bei. Es bleibt die Kraftkomponente parallel zur Ebene (Hangabtriebskraft), die die Masse aus der Ruhe ($v(0) = 0$) bewegt. Ferner erscheint uns die Bewegung eindimensional wenn wir sie im Bezugssystem S' betrachten. Somit erhält man aus (2.3) für die Bewegung in S'

$$x'(t) = x_0 - \frac{1}{2}(g \sin \alpha)t^2$$

$$y'(t) = 0 .$$

Der Zusammenhang zwischen S und S' ist (für $y' = 0$)

$$x = x' \cos \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha .$$

Damit erhält man für die Bewegung in S

$$x(t) = x_0 \cos \alpha - \frac{1}{2}(g \sin \alpha)(\cos \alpha)t^2$$

$$y(t) = x_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}(g \sin^2 \alpha)t^2$$

Als Extremfälle betrachten wir

$$\alpha = \frac{\pi}{2} : \text{freier Fall} \Rightarrow x(t) = 0, y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\alpha = 0 : \text{Ruhe} \Rightarrow x(t) = x_0, y(t) = 0$$

2.1.2 Arbeit und Energie bei konstanter Kraft

Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung, die wir über die Ortskoordinate integrieren werden

$$F = m\ddot{x} \quad \Bigg| dx$$

$$F dx = m \frac{dv}{dt} \cdot dx \quad \Bigg| \int_{t_1}^{t_2}$$

Für die rechte Seite (rhs) erhält man

$$\begin{aligned} \text{rhs} &= m \int_{t_1}^{t_2} \frac{dv}{dt} dx = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt} dv = m \int_{t_1}^{t_2} v dv \\ &= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2, \quad v_j = v(t_j), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Dabei ist v_j die Geschwindigkeit des Massenpunktes am Ort x_j . Die linke Seite (lhs) ergibt, da F konstant ist,

$$\begin{aligned} \text{lhs} &= \int_{t_1}^{t_2} F dx \\ &= F \int_{t_1}^{t_2} dx = F(x_2 - x_1), \quad x_j = x(t_j), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir folgende Aussage

$W \equiv F(x_2 - x_1) \quad = \quad \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (2.4)$
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>Die Arbeit W (work), die verrichtet wurde, um einen Massenpunkt im konstanten Kraftfeld von x_1 nach x_2 zu bringen.</p> </div> <div style="width: 45%; text-align: center;"> <p>\equiv</p> <p>Änderung der kinetischen Energie (Bewegungsenergie), die durch die Arbeit W hervorgerufen wird.</p> </div> </div>

Bemerkungen:

(i) Die Einheit der Arbeit (Energie) in SI ist

$$1 \text{Joule} = 1 \text{N} \cdot \text{m} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

(ii) Die Umordnung der Terme in (2.4) ergibt

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - F x_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - F x_2$$

Man definiert $U(x_j) \equiv -F \cdot x_j$ als die potentielle Energie eines Massenpunktes am Ort x_j . Damit gilt

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2) \equiv E$$

Die mechanische Gesamtenergie E eines Massenpunktes bestehend aus seiner potentiellen Energie und seiner kinetischen Energie ist zu den Zeiten t_1 ($x_1 \equiv x(t_1)$, $v_1 \equiv v(t_1)$) und t_2 ($x_2 \equiv x(t_2)$, $v_2 \equiv v(t_2)$) identisch. D.h. die Energie E ist eine Erhaltungsgröße bei konstanter Kraft.

- (iii) Im Falle der erdnahen Gravitation $F = -mg$ ist die potentielle Energie nur davon abhängig, wie hoch man den Massenpunkt über Bodenniveau bringt, da die Gravitationskraft radial zum Mittelpunkt der Erde gerichtet ist. Sei also h_j die Höhe des Massenpunktes zur Zeit t_j bezogen auf die Erdoberfläche, so besitzt der Massenpunkt die potentielle Energie mgh_j und es gilt für die Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

B2.4 Senkrechter Wurf nach oben

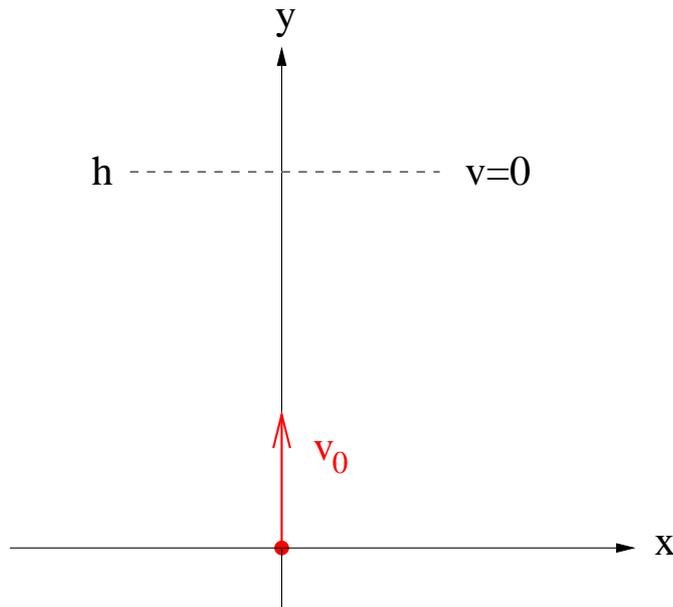


Abb. 2.5: Senkrechter Wurf

Ein Massenpunkt wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen. Man berechne seine maximale Höhe.

Aus der Energieerhaltung folgt, dass die mechanische Gesamtenergie des Massenpunktes am Boden zur Zeit $t = 0$ ($E = \frac{1}{2}mv_0^2$) identisch sein muss mit der Gesamtenergie, die er im höchsten Punkt (Umkehrpunkt) seiner Bewegung erreicht ($v = 0$, deshalb $E = mgh$).

D. h.

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$

$$\Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Wir konnten diese Lösung so einfach erhalten, weil der Energiesatz bereits ein Integral der Bewegungsgleichung ist, also eine Teillösung der Differentialgleichung. Beachten Sie, wieviel aufwändiger die Berechnung der maximalen Höhe über das Weg-Zeit-Gesetz durchzuführen wäre!

2.1.3 Impuls und Leistung bei konstanter Kraft

Ausgehend von der allgemeinen Formulierung der Bewegungsgleichung

$$F = \frac{dp}{dt}$$

führt die Integration über die Zeit zum Impuls des Massenpunktes

$$p(t) = p_0 + \int_0^t F dt'$$

$$= p_0 + F \cdot t .$$

Für den freien Fall gilt mit $F = -mg$

$$p(t) = p_0 - mgt$$

und mit $p = m \cdot v$ erhält man wieder das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz. Die Leistung P (power) eines mechanischen Systems ist definiert als die Arbeit, die pro Zeiteinheit verrichtet wird

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(F \cdot x) = F \frac{dx}{dt}$$

$$= F \cdot v .$$

Die Einheit der Leistung ist 1 Watt. Im SI gilt $1W = 1 \frac{J}{s}$.

2.2 Ortsabhängige Kräfte

Wir wollen den Begriff Arbeit (Energie) auf ortsabhängige Kräfte erweitern und definieren

$$W = \int_{x_0}^x F(x') dx'$$

als die Arbeit, die aufgewandt werden muss, um einen Massenpunkt unter Einwirkung der ortsabhängigen Kraft $F(x')$ von x_0 nach x zu bewegen. Dann gilt wie im vorigen Abschnitt

$$W = \int_{x_0}^x F(x') dx' = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 . \quad (2.5)$$

Die Arbeit W , die aufgebracht wird, erzeugt eine Änderung in der kinetischen Energie.

Bemerkungen:

- (i) Die Arbeit hängt offenbar nur von Anfangs- und Endpunkt der Bewegung ab. Man kann also eine Potentialfunktion $U(x)$ definieren mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} W &\equiv -U(x) + U(x_0) \\ \rightarrow U(x) &= - \int F(x) dx \\ \rightarrow F(x) &= - \frac{dU}{dx} \end{aligned}$$

- (ii) Aus (2.5) erhält man durch Umordnung

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E$$

den Energieerhaltungssatz:

In einem rein ortsabhängigen Kraftfeld ist die Energie eine Erhaltungsgröße. Kräfte, für welche die Energie konstant ist, nennt man konservativ. Kennzeichnend für konservative Kräfte ist, dass man sie aus einer Potentialfunktion ableiten kann

$$E = const \Leftrightarrow F = - \frac{dU}{dx} .$$

Beispiele:

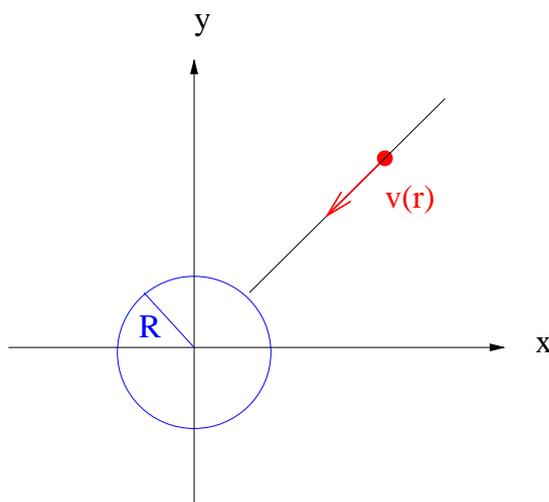


Abb. 2.6: Freier Fall aus unendlicher Entfernung

B2.5 Ein Körper fällt aus unendlicher Entfernung radial auf die Erde zu. Mit welcher Geschwindigkeit trifft er die Erdoberfläche?

Wir wollen annehmen, der Massenpunkt befinde sich anfänglich in Ruhe ($v_0 = 0$). Aus dem Energieerhaltungssatz (2.5) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= - \int_{\infty}^R \gamma \frac{Mm}{r^2} dr \\ &= \gamma \frac{Mm}{r} \Big|_{\infty}^R = \gamma \frac{Mm}{R} \\ \rightarrow v &= \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \approx 11 \frac{km}{s} \end{aligned}$$

B2.6 Wie groß muss die Geschwindigkeit eines Massenpunktes sein, um das Gravitationsfeld der Erde zu verlassen ?

Dabei handelt es sich um die Umkehrung der Aufgabenstellung B 2.5.

Die Fluchtgeschwindigkeit von der Erdoberfläche beträgt

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \approx 11 \frac{km}{s} .$$

Ein interplanetares Raumschiff (z.B. Flug Erde-Mars) muss diese Geschwindigkeit erreichen.

2.2.1 Potentiale

Kräfte heißen konservativ, wenn sie über ein Potential definiert sind, d.h.

$$F = -\frac{dU}{dx} \Leftrightarrow U = - \int F dx .$$

Die mechanische Gesamtenergie setzt sich in diesem Fall zusammen aus kinetischer Energie $T = \frac{1}{2}mv^2$ und potentieller Energie $U = - \int F dx$. Kennt man die Potentialfunktion eines mechanischen Systems, so kann man bei gegebener Gesamtenergie

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 - \int F dx$$

qualitative Aussagen über die mögliche Bewegungsform erhalten, ohne die Bewegungsgleichung lösen zu müssen. Man nennt einen Massenpunkt frei, wenn er sich beliebig im Raum bewegen kann und gebunden, wenn er im Raum lokalisiert ist. Ist z.B. $E = E_1$ (Abb. 2.7), so ist der Massenpunkt im Gebiet $x \in [x_{11}, x_{12}]$ gebunden. Er kann dieses Gebiet nicht verlassen, da für alle Punkte außerhalb des Intervalls $U > E_1$ ist und somit

$$T = E_1 - U < 0 \text{ für } x \notin [x_{11}, x_{12}] .$$

Solche Orte, für die $E - U < 0$ gilt, nennt man klassisch verbotene Raumbereiche. An den Randpunkten x_{11} und x_{12} ist $E = U$, somit $v = 0$, d.h. der Massenpunkt ist momentan bewegungslos und kann sich nur in umgekehrter Richtung weiterbewegen. Deshalb

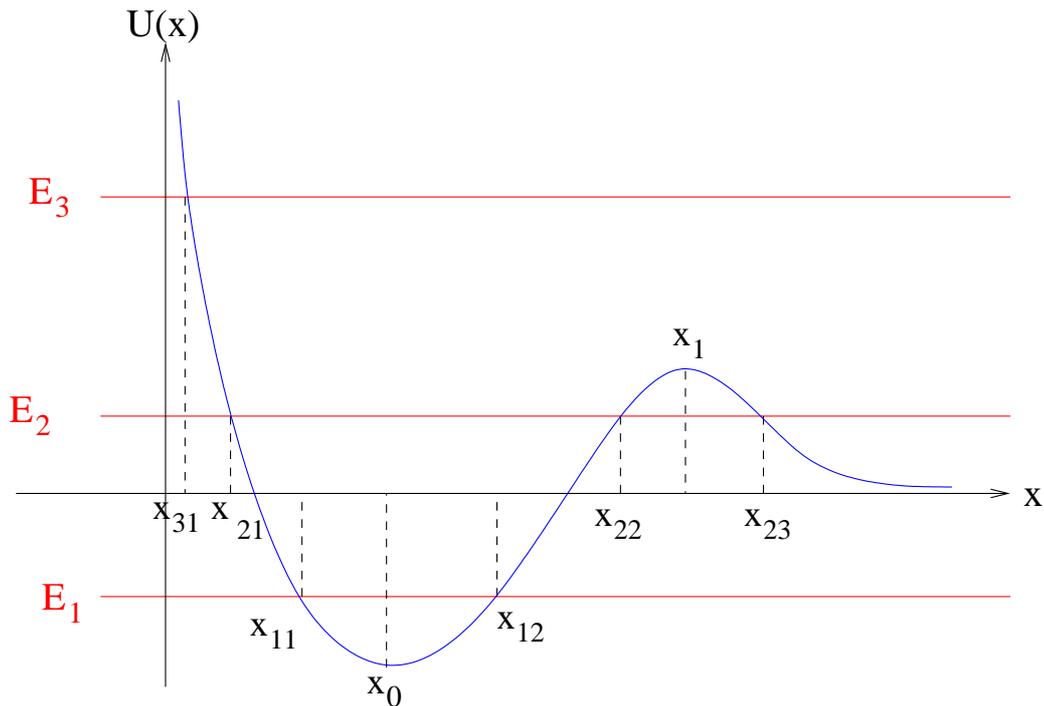


Abb. 2.7: Analyse der Bewegungsform aus der Potentialfunktion

nennt man die Randpunkte Umkehrpunkte der Bewegung. Besitzt ein Massenpunkt die Energie E_2 , so ist er entweder im Intervall $[x_{21}, x_{22}]$ gebunden oder für $x > x_{23}$ frei. Ein Massenpunkt mit der Energie E_3 kann sich frei im Raum bewegen außer im klassisch verbotenen Bereich $x < x_{31}$. Berechnet man für die Potentialfunktion der Abb. 2.7 die Kraft $F = -\frac{dU}{dx}$, so sieht man, dass für x_0 und x_1 die Kraft verschwindet. Solche Punkte nennt man Gleichgewichtspunkte mit stationäre Punktlösungen, für die gilt

- (i) Ein Massenpunkt mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ befindet sich in den Punkten x_0, x_1 , für die gilt

$$-U'(x_0) = F(x_0) = 0$$

in Ruhe.

- (ii) Gilt mit $U'(x_0) = 0$

- $U''(x_0) < 0$, so befindet sich der Massenpunkt in einem instabilen Gleichgewicht. Kleine Ortsveränderungen bewirken die unwiderrufliche Entfernung des Massenpunktes vom Ort x_0
- $U''(x_0) = 0$, so befindet sich der Massenpunkt in einem unbestimmten Gleichgewicht.
- $U''(x_0) > 0$, so befindet sich der Massenpunkt in einem stabilen Gleichgewicht. Kleine Ortsveränderungen bewirken stets eine Rückkehr zu x_0 .

2.2.2 Massenpunkte in der Nähe eines stabilen Gleichgewichtes

Eine außerordentlich wichtige Klasse von Bewegungsproblemen erhält man für Anfangsbedingungen nahe einer stabilen Punktlösung. Sei x_0 ein stabiler Gleichgewichtspunkt zum Potential $U(x)$, also $U'(x_0) = 0$ und $U''(x_0) > 0$, so gilt für jeden Ort x in einer Umgebung von x_0 die Taylorentwicklung des Potentials

$$\begin{aligned} U(x) &= U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{U''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \mathcal{O}[(x - x_0)^3] \\ &\approx U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2. \end{aligned}$$

Für die Kraft auf den Massenpunkt erhält man dann in guter Näherung

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \approx -U''(x_0)(x - x_0) \quad (2.6)$$

bzw. mit der Substitution $\chi = x - x_0$ und $k = U''(x_0)$

$$F(\chi) = -k\chi$$

stets ein lineares Kraftgesetz. Die Bewegung des Massenpunktes in einer Umgebung eines stabilen Gleichgewichts wird durch die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\ddot{\chi} &= -k\chi \\ \chi(0) &= \chi_0 \quad v(0) = v_0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

beschrieben, wenn χ_0 hinreichend klein ist, so dass die Näherung (2.6) der Taylorreihe für das Potential gerechtfertigt ist. Die Bewegungsgleichung (2.7) ist die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$$

und der Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}}.$$

Jedes System, das einen stabilen Gleichgewichtszustand besitzt, wird sich bei einer kleinen Störung dieses Gleichgewichts wie ein harmonischer Oszillator verhalten. Beispiele sind Pendel (siehe Kap. 3), Moleküle oder Festkörper, in denen die atomaren Zentren gegeneinander oszillieren (Phononenanregung eines Festkörpers), aber auch ökologische und ökonomische Systeme, in denen eine Komponente von außen leicht modifiziert wird.

2.3 Geschwindigkeitsabhängige Kräfte

Wenn wir uns durch ein Medium bewegen (Luft oder Wasser), so spüren wir abhängig von unserer Geschwindigkeit eine Widerstandskraft, deren Ursache damit verbunden ist,

dass wir mit unserem Körper das Medium verdrängen müssen. Aus Erfahrung wissen wir, dass diese Reibungskraft mit wachsender Geschwindigkeit zunimmt (Beispiele: Luftwiderstand beim Fahrrad- oder Motorradfahren; Wasserverdrängung beim Turmspringen aus unterschiedlichen Höhen). Etwas genauer findet man experimentell (Windkanalversuche) für die Reibungskraft F_R

$$\begin{aligned}\vec{F}_R &= -\alpha\vec{v} - \beta v^2 \frac{\vec{v}}{v} \\ &\approx \begin{cases} -\alpha\vec{v} & v \leq 0.25 \frac{m}{s} \\ -\beta v^2 \frac{\vec{v}}{v} & 0.25 \frac{m}{s} < v < 330 \frac{m}{s} \end{cases}\end{aligned}\quad (2.8)$$

Die Reibungskraft ist also immer der Bewegung entgegen gerichtet. Sie ist proportional zu v bei kleinen Geschwindigkeiten (Reibung nach Stokes) und abhängig von v^2 bei größeren Geschwindigkeiten (Reibung nach Newton). Für Geschwindigkeiten nahe der Schallgeschwindigkeit gelten eigene Gesetzmäßigkeiten. In die Koeffizienten α, β gehen vor allem die Querschnittsfläche des Körpers und seine Oberflächenbeschaffenheit ein. Systeme mit Reibungskräften sind nicht konservativ, da sie nicht die mechanische Gesamtenergie erhalten (Beispiel: beim Eintritt eines Körpers in die Erdatmosphäre wird Reibungshitze erzeugt, die der mechanischen Energie entzogen wird). Im Gegensatz zu konservativen Systemen nennt man geschwindigkeitsabhängige Kräfte dissipativ.

B2.7 Gebremster Fall mit Luftreibung

Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{y} = -g - \frac{\alpha}{m}\dot{y} \equiv -g - k\dot{y}.$$

Im Gegensatz zum freien Fall ohne Reibung ist die wirkende Kraft nicht mehr konstant, so dass wir die Bewegungsgleichung nicht mehr direkt integrieren können. Zur allgemeinen Lösung benutzen wir die Methode der Separation der Variablen und erhalten

$$\begin{aligned}\ddot{y} = \frac{dv}{dt} &= -g - kv = -k\left(\frac{g}{k} + v\right) \\ &\rightarrow \frac{dv}{\frac{g}{k} + v} = -k dt.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Substitution

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= \frac{g}{k} + v \\ d\tilde{v} &= dv\end{aligned}$$

können wir die Bewegungsgleichung direkt integrieren und erhalten

$$\begin{aligned}\int \frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} &= -k \int dt \\ \ln \tilde{v} &= -kt + \tilde{c},\end{aligned}$$

bzw nach Rücktransformation

$$\ln\left(\frac{g}{k} + v\right) = -kt + \tilde{c}.$$

\tilde{c} ist die Integrationskonstante der unbestimmten Integration. Exponentieren ergibt

$$\begin{aligned}\frac{g}{k} + v &= c \cdot e^{-kt}, \quad c = e^{\tilde{c}} \\ v(t) &= -\frac{g}{k} + c \cdot e^{-kt}.\end{aligned}$$

die mathematisch allgemeine Lösungsschar. Berücksichtigt man als Anfangsbedingung $v(0) = 0$, so können wir c bestimmen und erhalten schließlich

$$v(0) = 0 = -\frac{g}{k} + c \Rightarrow c = \frac{g}{k}$$

$$v(t) = -\frac{g}{k} (1 - e^{-kt}), \quad k = \frac{\alpha}{k}.$$

Für den Grenzfall kleiner Zeiten können wir die e-Funktion entwickeln (Taylorreihe)

$$\begin{aligned}v(t) &\approx -\frac{g}{k} \left(1 - \left(1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2 \mp \dots\right)\right) \\ &= -gt + \frac{1}{2}gkt^2\end{aligned}$$

D.h. zu Beginn ist der Fall ungebremst und entspricht dem freien Fall $v = -gt$. Im weiteren Verlauf setzt die Reibung merkbar ein. Nach einer langen Fallzeit erhält man

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -\frac{g}{k} = -\frac{g}{\alpha}m$$

eine konstante Endgeschwindigkeit, abhängig von der Masse des fallenden Körpers und seinen Reibungseigenschaften.

Beachte: der freie Fall im Vakuum ist unabhängig von der Masse, der gebremste Fall im Medium nicht!

Kapitel 3

Oszillatoren

Oszillatoren haben in allen Bereichen der Physik deshalb eine so große Bedeutung, weil die Potentialfunktionen energieerhaltender Systeme in der Nachbarschaft von Gleichgewichtslösungen durch ein Oszillatorpotential approximiert werden können. In erster Näherung ist das Oszillatorpotential quadratisch und damit die Kraft linear. Diese spezielle Form eines Oszillators mit linearem Kraftgesetz nennt man "harmonischer Oszillator". Wir werden sehen, dass für harmonische Oszillatoren kennzeichnend ist, dass die Frequenz unabhängig von der Amplitude ist.

Charakteristisch für die Oszillatorbewegung ist, dass die Kraft auf den Massenpunkt immer auf den Ort der Gleichgewichtslösung hin gerichtet ist: aus diesem Grund nennt man die Kraft "die Rückstellkraft". Neben der Rückstellkraft wird der Oszillator durch Reibungskräfte und möglicherweise durch eine zeitabhängige äußere treibende Kraft beeinflusst

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + F_R(\dot{x}) + F_{ext}(t) .$$

In der Mechanik wird der harmonische Oszillator realisiert durch z.B. das horizontale Federpendel (Abb. 3.1) oder das mathematische Pendel (Abb. 3.2), beide in ihrer jeweils

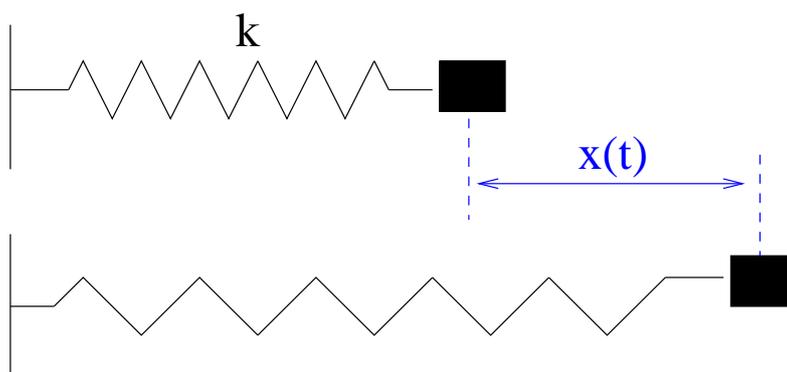


Abb. 3.1: Horizontales Federpendel $F = -kx$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

linearisierten Form. Für das Federpendel findet man

$$-kx = -m\omega_0^2 x, \omega_0^2 = \frac{k}{m} ,$$

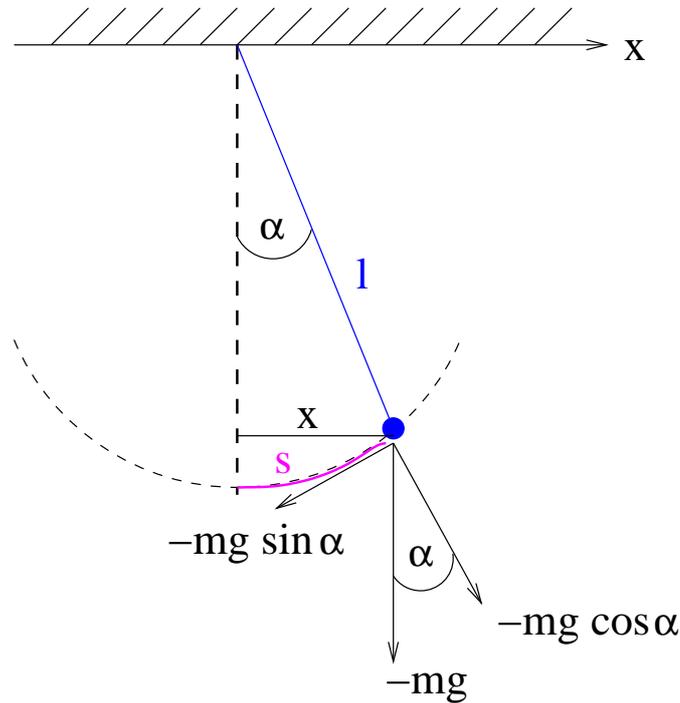


Abb. 3.2: Mathematisches Pendel. Bei kleinen Ausschlägen gilt $\sin \alpha \approx \alpha$ und für das Bogenelement $s = l\alpha \approx x \rightarrow F = -m\frac{g}{l}x, \omega_0^2 = \frac{g}{l}$

wobei k (die Federkonstante) ein Maß für die Stärke der Feder darstellt. Für das mathematische Pendel ist die Rückstellkraft

$$F = -mg \sin \alpha$$

zunächst nichtlinear. Bei kleinen Ausschlägen gilt aber

$$\sin \alpha \approx \alpha \wedge \text{Bogen } x \approx l \cdot \alpha$$

und somit

$$F = -mg \sin \alpha \approx -mg \frac{x}{l}, \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Die Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit und der Bewegung entgegengerichtet, also (Reibungskoeffizient r)

$$F_R = -m \cdot r \cdot \dot{x}.$$

Die antreibende Kraft ist nur zeitabhängig und überträgt mechanische Energie auf das Pendel. Als Bewegungsgleichung ergibt sich somit generisch für alle harmonischen Oszillatoren

$$\ddot{x} + r\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F_{ext}(t). \quad (3.1)$$

Entscheidend ist die lineare Rückstellkraft. Mathematisch handelt es sich bei (3.1) um eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Man nennt sie homogen für $F_{ext} = 0$, sonst inhomogen. Diese Begriffe sind wichtig für die weitere Diskussion.

3.1 Der reibungsfreie harmonische Oszillator

Im einfachsten Fall lautet die Bewegungsgleichung (3.1)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.2)$$

d.h. ein harmonischer Oszillator ohne Reibung und äußeren Antrieb. Als Ansatz für die Lösung betrachten wir

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

und setzen in die Bewegungsgleichung ein

$$(\lambda^2 + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0.$$

Diese Gleichung muss für alle t erfüllt werden, was nur möglich ist, wenn

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

ist. Die Lösung dieser charakteristischen Gleichung ist rein imaginär

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

und man erhält somit zwei linear unabhängige Lösungen

$$\left\{ e^{i\omega_0 t}, e^{-i\omega_0 t} \right\}.$$

Diese beiden Lösungen nennt man das Fundamentalsystem der Differentialgleichung (3.2). Wegen der Linearität der Bewegungsgleichung ist jede beliebige Superposition der Fundamentallösung ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung, also

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (3.3)$$

(3.3) ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3.2). Sie stellt eine Lösungsschar dar als Funktion der Parameter c_1 und c_2 . c_1 und c_2 sind Integrationskonstanten, die wir im Prinzip durch die zweifache formale Integration der Differentialgleichung (3.2) erhalten haben. Um aus der Lösungsschar eine physikalische Lösung zu erhalten, müssen wir die Anfangsbedingungen der Bewegung berücksichtigen

$$x(0) = x_0 \wedge \dot{x}(0) = v_0.$$

Einsetzen in die allgemeine Lösung ergibt

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 &= c_1 + c_2 \\ \dot{x}(0) = v_0 &= i\omega_0(c_1 - c_2). \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} \left(x_0 - i \frac{v_0}{\omega_0} \right) \\ c_2 &= \frac{1}{2} \left(x_0 + i \frac{v_0}{\omega_0} \right) = c_1^*. \end{aligned}$$

Damit haben wir als physikalische Lösung des harmonischen Oszillators

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(x_0 - i \frac{v_0}{\omega_0} \right) e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} \left(x_0 + i \frac{v_0}{\omega_0} \right) e^{-i\omega_0 t}. \quad (3.4)$$

Diesen Ausdruck können wir umformen, denn mit

$$z(t) = \left(x_0 - i \frac{v_0}{\omega_0} \right) \cdot e^{i\omega_0 t}$$

gilt für (3.4) mit Hilfe der Eulergleichung $\exp(i\omega_0 t) = \cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(z(t) + z^*(t)) = \operatorname{Re} z(t) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left(x_0 - \frac{v_0}{\omega_0} \right) (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) \right\} \\ &= x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Wir sehen also, dass die Lösung (3.4) reell ist und somit einen physikalisch beobachtbaren Bewegungsablauf beschreibt. Die Lösung lässt sich aber noch in einer dritten Form angeben. Ausgehend von (3.5) erhält man mit Hilfe des Kosinussatzes

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t + \phi) \\ &= A \{ \cos \omega_0 t \cos \phi - \sin \omega_0 t \sin \phi \} \\ &= (A \cos \phi) \cos \omega_0 t + (-A \sin \phi) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (3.6)$$

durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos \phi, \quad -\frac{v_0}{\omega_0} = A \sin \phi \\ \Rightarrow x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} &= A^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = A^2 \\ A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \\ \phi &= \arccos \frac{x_0}{A}. \end{aligned} \quad (3.6')$$

Bemerkungen:

- (i) Die Lösungen der Form (3.4), (3.5) und (3.6) sind identische Beschreibungen der Bewegung eines freien (ungedämpft und ohne äußeren Antrieb) harmonischen Oszillators: der Massenpunkt oszilliert mit konstanter Amplitude und Frequenz. Charakteristisch für die harmonische Bewegung ist, dass die Frequenz unabhängig von der Amplitude ist.

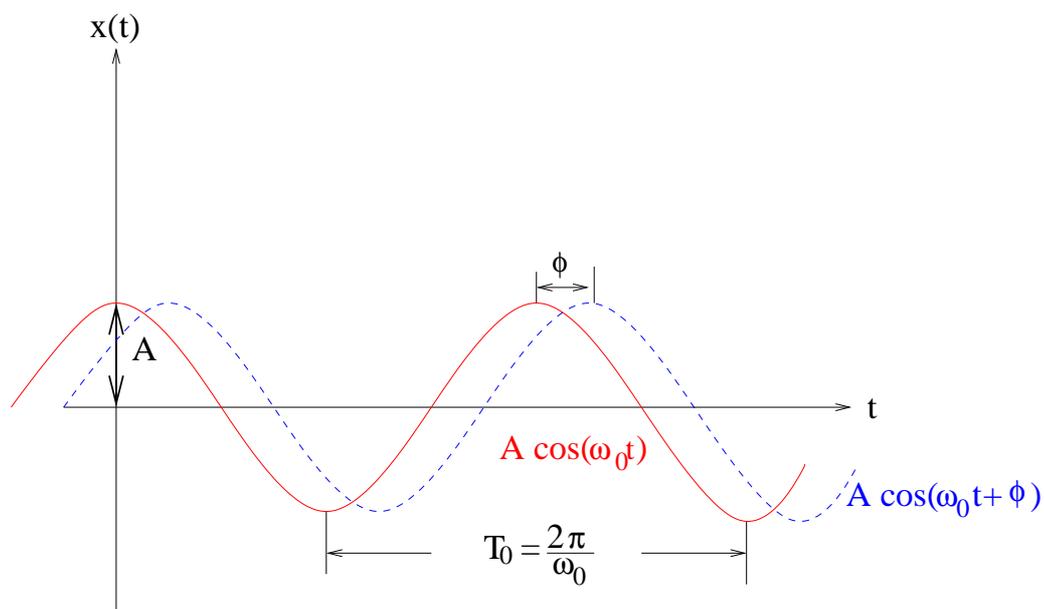


Abb. 3.3: Lösung des freien harmonischen Oszillators. A : Amplitude, ω_0 : Frequenz, T_0 : Periode, ϕ : Phase

- (ii) Die Form (3.6) zeigt, wie sich die Lösungen abhängig von den Anfangsbedingungen unterscheiden können: Amplitude A und Phase ϕ sind direkt von den Anfangsbedingungen abhängig,

Beispiel

B3.1 Berechne die Bewegung des horizontalen Federpendels.

Die Masse $m = 2\text{ kg}$ wird um 10 cm mit einer Kraft von 5 N aus der entspannten Federposition ausgelenkt und dann losgelassen.

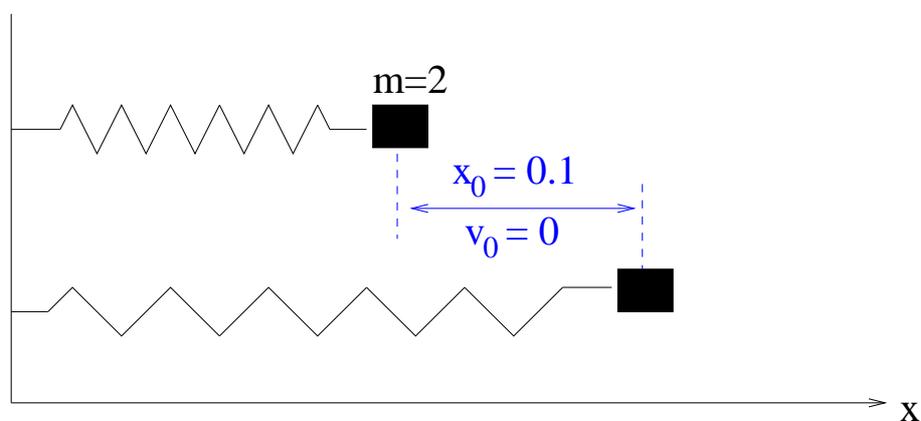


Abb. 3.4: Federpendel

Lösung:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

a) Berechne Federkonstante k :

$$F = -kx_0 \Rightarrow k = \left| \frac{F}{x_0} \right| = \frac{5}{0.1} = 50 \frac{N}{m}$$

b) Berechne Frequenz ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = 25 \Leftrightarrow \omega_0 = 5 \frac{1}{s}$$

c) Berechne A und ϕ aus Anfangsbedingungen (3.6'):

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.1 \quad \wedge \quad v_0 = 0 \\ A &= x_0, \quad \phi = \arccos \frac{x_0}{x_0} = 0. \end{aligned}$$

Das Weg-Zeit-Gesetz lautet somit

$$x(t) = 0.1 \cos(5t) .$$

3.2 Energie des freien harmonischen Oszillators

Da die Rückstellkraft konservativ ist, ist die totale mechanische Energie erhalten und es gilt (E:Gesamtenergie, T:kinetische Energie, U:potentielle Energie)

$$U = - \int F dx = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

$$\begin{aligned} E = T + U &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \\ &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 \{ A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \} \\ &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = const . \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Lösung haben wir so im Retrospekt bewiesen, dass E eine Erhaltungsgröße ist. Das wird im Oszillator dadurch erreicht, dass kinetische Energie und potentielle Energie gegenphasig oszillieren

$$T \propto \sin^2(\omega_0 t + \phi) \quad U \propto \cos^2(\omega_0 t + \phi) .$$

3.3 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Die Bewegungsgleichung des gedämpften Oszillators lautet

$$\ddot{x} + r\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 .$$

Mit dem Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

erhält man die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + r\lambda + \omega_0^2 = 0 .$$

Bestimmung der beiden möglichen Exponenten

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \omega_0^2} .$$

Die allgemeine Lösung lautet dann

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} .$$

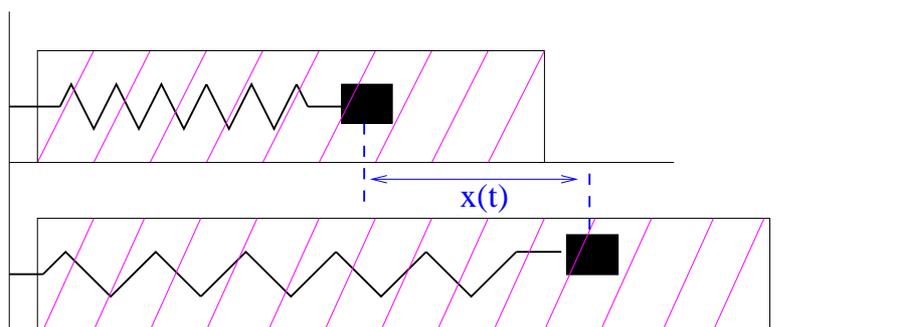


Abb. 3.5: Realisierung eines Stoßdämpfers. Reibung durch Viskosität der Kolbenflüssigkeit.

Zur weiteren Diskussion wollen wir die folgenden Fälle unterscheiden

- (1) Überdämpfter Fall: $\frac{r^2}{4} > \omega_0^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathcal{R}$

In diesem Fall sind die Exponenten reell und negativ. Man erhält für c_1 und c_2 aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= x_0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 &= v_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\lambda_2 x_0 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ c_2 &= \frac{v_0}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} c_1 \end{aligned}$$

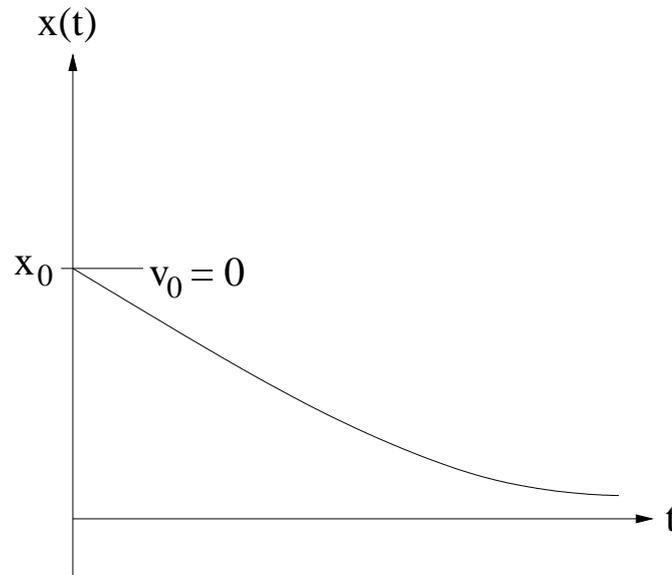


Abb. 3.6: Überdämpfter oder Kriechfall für $x(0) = 0$ und $v(0) = 0$.

In diesem Fall ist die Lösung eine abfallende Exponentialfunktion: der Massenpunkt "kriecht" aus seiner Anfangsauslenkung in unendlicher Zeit in die Gleichgewichtslage.

- (2) Aperiodischer Grenzfall: $\frac{r^2}{4} = \omega_0^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{r}{2} \in \mathcal{R}$

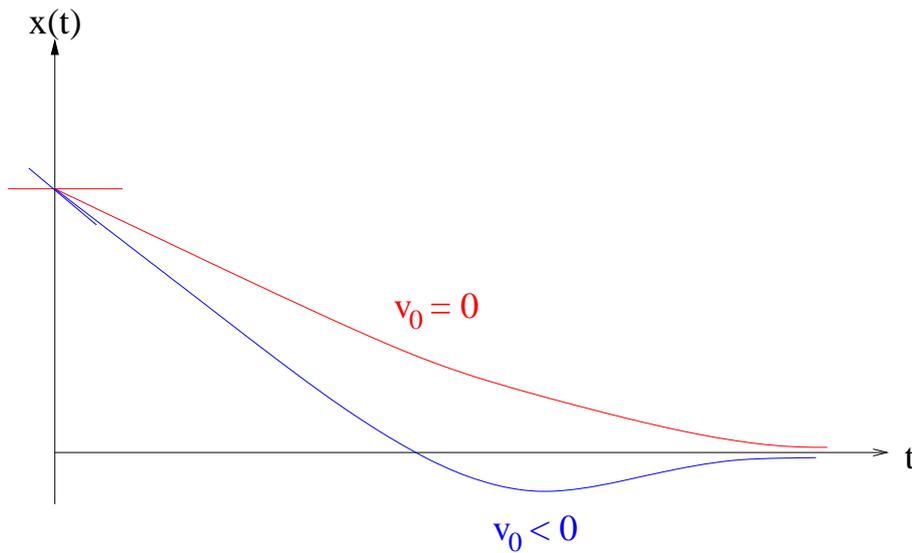


Abb. 3.7: Aperiodischer Grenzfall.

In diesem Fall müssen wir ein Fundamentalsystem konstruieren, da $(\lambda_1 = \lambda_2)$ wir

nur eine Lösung erhalten.

Beh.: $x = te^{-\frac{r}{2}t}$ ist ebenfalls eine Lösung.

Einsetzen in die Differentialgleichung mit

$$\left. \begin{aligned} r\dot{x} &= re^{-\frac{r}{2}t} - \frac{r^2}{2}te^{-\frac{r}{2}t} \\ \ddot{x} &= -re^{-\frac{r}{2}t} + \frac{r^2}{4}te^{-\frac{r}{2}t} \end{aligned} \right\} +$$

$$\omega_0^2 x = \frac{r^2}{4}te^{-\frac{r}{2}t}$$

zeigt, dass $x = te^{-\frac{r}{2}t}$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung ist. Wir erhalten die allgemeine Lösung für den aperiodischen Grenzfall

$$x(t) = e^{-\frac{r}{2}t} (c_1 + c_2 t)$$

und die physikalisch realisierte Lösung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = c_1 \\ \dot{x}(0) &= v_0 = -\frac{r}{2}c_1 + c_2 \quad \Rightarrow c_2 = v_0 + \frac{r}{2}x_0 \\ x(t) &= e^{-\frac{r}{2}t} \left(x_0 + \left(v_0 + \frac{r}{2}x_0 \right) t \right) . \end{aligned}$$

- (3) Oszillatorlösung: $\frac{r^2}{4} < \omega_0^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2^* \in \mathcal{C}$. Für komplexwertige Exponenten erhalten wir für die allgemeine Lösung ein oszillatorisches Verhalten

$$x(t) = e^{-\frac{r}{2}t} \{ c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \}; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4}} .$$

Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich dann

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\frac{r}{2}t} \cos(\omega t + \phi) \\ A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \phi = \arccos \frac{x_0}{A} . \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- (i) Die Periode des gedämpften Oszillators $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4}}}$ unterscheidet sich von der Periode des freien Oszillators $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ je stärker die Reibung ist. Es gilt $T > T_0$ und für den Fall $\omega_0^2 = \frac{r^2}{4}$ gilt $T \rightarrow \infty$ (aperiodischer Grenzfall).

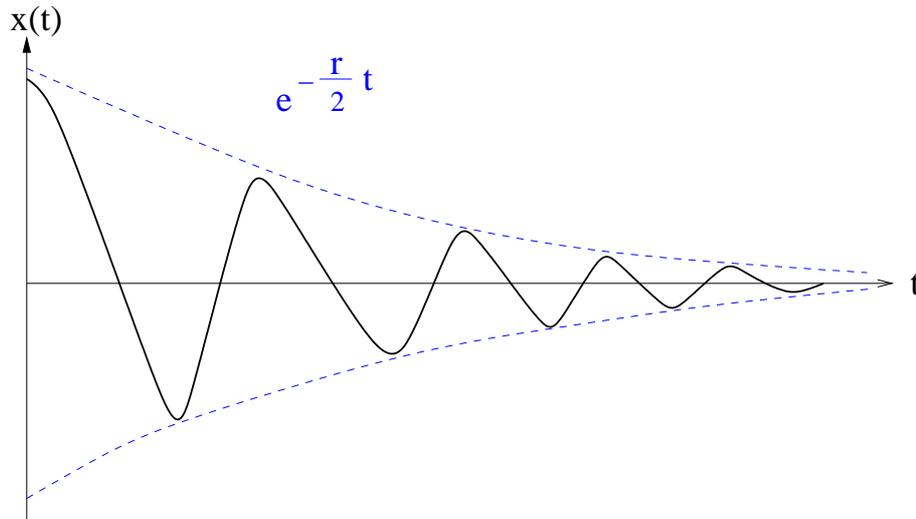


Abb. 3.8: Oszillatorlösung

- (ii) Ein Maß für die Dämpfung ist die Abklingzeit $T_r = \frac{1}{r}$. Nach der Zeit $2T_r$ ist die Amplitude auf $\frac{1}{e}$ des Anfangswertes abgefallen.

$$\mathcal{A}(t) = Ae^{-\frac{r}{2}t} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}(2T_r)}{\mathcal{A}(0)} = \frac{1}{e}.$$

- (iii) Man definiert den Quotient aus den beiden Zeitkonstanten des Systems, nämlich T_r und T_0 , als Qualitätsfaktor oder Q-Wert des Oszillators,

$$Q = \frac{\omega_0}{r} = 2\pi \frac{T_r}{T_0}.$$

Oszillator	Q	$\omega_0 [s^{-1}]$	$r [s^{-1}]$
Mechanisches Pendel	10^2	1	10^{-2}
Stimmgabel	10^4	10^3	10^{-1}
FM Tuner	10^4	10^8	10^4
angeregtes Atom	10^7	10^{15}	10^8

Im Falle des angeregten Atoms ist T_r das Maß für die Lebensdauer des Zustandes und $\omega_0 = \Delta E$ die Anregungsenergie.

- (iv) Für die Energie des gedämpften Oszillators erhält man in Analogie zu Abschnitt 3.2

mit $\omega_0^2 = \omega^2 + \frac{r^2}{4}$

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \\ &= \frac{1}{2}mA^2 e^{-rt} \left\{ \frac{r^2}{4} \cos^2(\omega t + \phi) + r\omega \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi) \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) \right\} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-rt} \cos^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 e^{-rt} \left\{ \frac{r^2}{2\omega^2} \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{r}{\omega} \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi) + 1 \right\}. \end{aligned}$$

Ist die Reibung schwach, gilt $\omega \approx \omega_0$ und $r \ll \omega$, so dass wir die Energie approximieren können

$$E(t) \approx \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 e^{-rt} = E(0) \cdot e^{-rt}.$$

Wie zu erwarten nimmt die mechanische Gesamtenergie in einem dissipativen Oszillator mit der Zeit exponentiell ab. Eine Periode später erhält man für die Gesamtenergie

$$E(t+T) = E(0) \cdot e^{-r(t+T)} = E(t) \cdot e^{-rT}.$$

Generell gilt für zwei benachbarte Perioden für den Energieverlust

$$\Delta E(t) = E(t) - E(t+T) = E(t) (1 - e^{-rT})$$

bzw. für den prozentualen (relativen) Energieverlust

$$\frac{\Delta E}{E} = (1 - e^{-rT}) = 1 - 1 + rT - \frac{1}{2}r^2 T^2 + \mathcal{O}[(rT)^3].$$

Die Periode des gedämpften Oszillators ist (binomische Entwicklung von $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$)

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4}}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{4\omega_0^2}}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{4\omega_0^2} + \mathcal{O} \left[\left(\frac{r^2}{4\omega_0^2} \right)^2 \right] \right).$$

Bei schwacher Dämpfung ($r \ll \omega_0^2$) erhält man somit ($Q = \frac{\omega_0}{r}$)

$$\frac{\Delta E}{E} \approx rT \quad \wedge \quad T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{\pi r^2}{4\omega_0^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta E}{E} \approx \frac{2\pi}{Q} + \frac{\pi}{4} \frac{1}{Q^3},$$

d.h. der inverse Q-Wert eines Oszillators ist ein Maß für den Energieverlust pro Periode.

3.4 Der Phasenraum

Bisher haben wir die kinematischen Größen Ort und Impuls (Geschwindigkeit) immer als Funktion der Zeit betrachtet. Die Bewegung eines Massenpunktes ist vollständig bestimmt, wenn wir zu jeder Zeit Ort und Impuls des Massenpunktes angeben können. Am besten realisiert man diese Forderung in einer Darstellung, in der alle Orts- und Impuls-komponenten eines Massenpunktes zusammengefasst werden: dem Phasenraum.

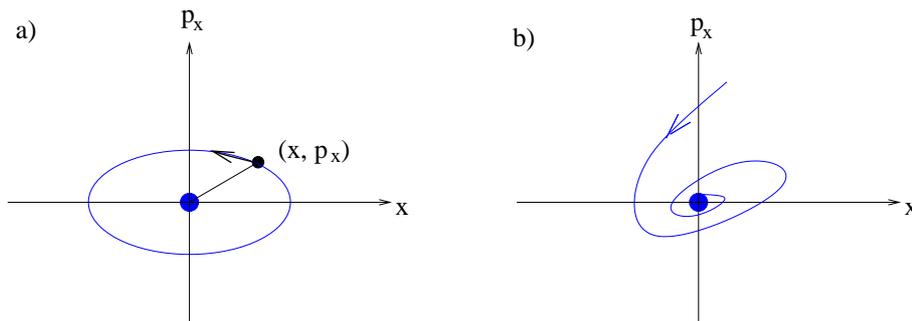


Abb. 3.9: Phasenraumdarstellung des harmonischen Oszillators. a) Die Phasenraumtrajektorie eines freien Oszillators ist eine Ellipse der Form: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$; $p_x(t) = -mA\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$. Der Koordinatenursprung ist die stabile Punktlösung, die man erhält, wenn man den Oszillator mit Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$ in seinen Gleichgewichtszustand $x(0) = 0$ versetzt. b) Die Phasenraumtrajektorie des gedämpften Oszillators beschreibt eine Spirale mit der Parameterdarstellung $x(t) = A \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi)$; $p_x(t) = -mAe^{-\frac{\gamma}{2}t} \left\{ \frac{\gamma}{2} \cos(\omega t + \phi) + \omega \sin(\omega t + \phi) \right\}$.

Bemerkungen:

- (i) Eine Gleichgewichtslösung wird im Phasenraum als Punkt dargestellt. Der Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist für den harmonischen Oszillator eine stabile Punktlösung.
- (ii) Der Teilraum des Phasenraums, in dem Anfangsbedingungen liegen, deren zugehörige Trajektorien gegen die selbe stabile Punktlösung konvergieren, heißt Attraktorbecken der Punktlösung. Entsprechend nennt man eine stabile Punktlösung einen Attraktor der Dimension 0.
- (iii) Die Phasenraumtrajektorie bestimmt den "Lebensraum" eines Massenpunktes zu allen Zeiten: es können nur die Punkte im Phasenraum erreicht werden, die zur Trajektorie gehören.
- (iv) Das Existenz- und Eindeigkeitstheorem für Systeme autonomer (nicht explizit zeitabhängiger) Differentialgleichungen besagt, dass die Lösung eine eindeutige Funktion der Anfangsbedingungen ist, wenn die Differentialgleichung eine Lipschitzbedingung erfüllt (grob entspricht dies der Bedingung, dass die "rechte Seite" der Dif-

ferentialgleichung $\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y})$ stetig ist). In diesem Sinne dürfen sich zwei Phasenraumtrajektorien der selben Differentialgleichung zu verschiedenen Anfangsbedingungen nicht schneiden. Würde man nämlich die Anfangsbedingungen auf den Schnittpunkt legen, wäre die Eindeutigkeit nicht erfüllbar. Insbesondere darf sich eine Trajektorie nicht selbst schneiden. (Beachte: Eine Differentialgleichung n . Ordnung lässt sich immer in ein System aus n Differentialgleichungen 1. Ordnung zerlegen!).

3.5 Der getriebene Oszillator

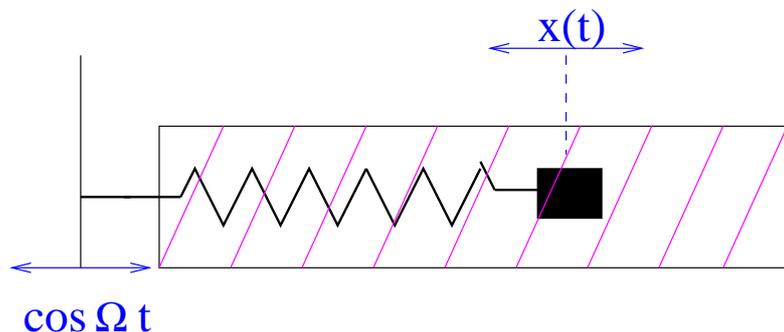


Abb. 3.10: Erzwungener harmonischer Oszillator

Erregt man den harmonischen Oszillator durch eine äußere harmonische Kraft, so hat man die Bewegungsgleichung zu lösen

$$\ddot{x} + r\dot{x} + \omega_0^2 x = \cos \Omega t .$$

Dabei handelt es sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Eine allgemeine Lösung erhält man durch Superposition der allgemeinen Lösung $x_h(t)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $\ddot{x}_h + r\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$ und einer speziellen Lösung $x_i(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung (Partikulärintegral), also

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t) .$$

Wir machen den Ansatz

$$x(t) = x_h(t) + B \cdot \cos(\Omega t + \Psi)$$

und müssen zeigen, dass B und Ψ so bestimmt werden können, dass der Ansatz die Bewegungsgleichung erfüllt. Durch Einsetzen erhält man

$$0 = \ddot{x} + r\dot{x} + \omega_0^2 x - \cos \Omega t = \ddot{x}_h + r\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h - B\Omega^2 \cos(\Omega t + \Psi) - Br\Omega \sin(\Omega t + \Psi) + B\omega_0^2 \cos(\Omega t + \Psi) - \cos \Omega t .$$

Da x_h eine Lösung der homogenen Gleichung ist, folgt mit Hilfe der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} 0 &= -B\Omega^2 (\cos \Omega t \cos \Psi - \sin \Omega t \sin \Psi) - Br\Omega (\sin \Omega t \cos \Psi + \cos \Omega t \sin \Psi) \\ &+ B\omega_0^2 (\cos \Omega t \cos \Psi - \sin \Omega t \sin \Psi) - \cos \Omega t \\ &= \cos \Omega t \{ -1 - B \cos \Psi (\Omega^2 - \omega_0^2) - B \sin \Psi \cdot r\Omega \} + B \sin \Omega t \{ \sin \Psi (\Omega^2 - \omega_0^2) - r\Omega \cos \Psi \} \end{aligned}$$

Diese Bedingung muss für beliebige Zeiten erfüllt werden. Da $\cos \Omega t$ und $\sin \Omega t$ linear unabhängig sind ist dies nur möglich wenn die Ausdrücke in den Klammern 0 sind, also

$$(\Omega^2 - \omega_0^2) \sin \Psi - r\Omega \cos \Psi = 0 \quad (i)$$

$$r\Omega \sin \Psi + (\Omega^2 - \omega_0^2) \cos \Psi = -\frac{1}{B} \quad (ii)$$

Aus (i) erhält man mit Division durch $\cos \Psi$ eine Bestimmung der Phase

$$\tan \Psi = \frac{r\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}.$$

Die Amplitude erhält man, indem man (i) und (ii) quadriert und das Ergebnis addiert

$$B = \frac{1}{\sqrt{r^2\Omega^2 + (\Omega^2 - \omega_0^2)^2}}.$$

Damit haben wir als allgemeine Lösung des getriebenen harmonischen Oszillators

$$x(t) = A(x_0, v_0) \cdot e^{-\frac{r}{2}t} \cos(\omega t + \phi(x_0, v_0)) + B \cos(\Omega t + \Psi) \quad (3.7)$$

B und Ψ sind durch die Parameter der Differentialgleichung festgelegt, A und ϕ müssen über die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ bestimmt werden. Wir sehen, dass die Lösung (3.7) zwei typische Verhaltensmuster aufweist: (i) für kleine Zeiten zeigt sich ein vorübergehendes Einschwingverhalten durch die Überlagerung von $\cos(\omega t + \phi_0)$ und $\cos(\Omega t + \Psi)$. (ii) für große Zeiten klingt die Amplitude des ersten Terms exponentiell ab, so dass der Oszillator vollständig durch die harmonische Antriebskraft "versklavt" wird. Im Phasenraum entspricht die zeitlich asymptotische Lösung einer Ellipse. Da jede

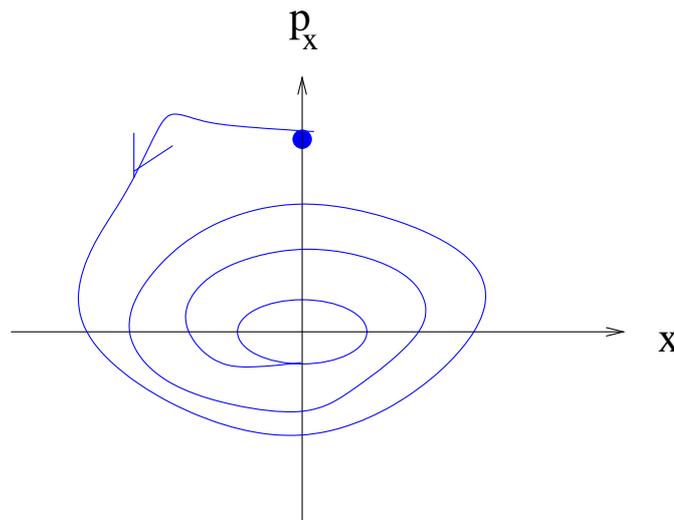


Abb. 3.11: Phasenraumtrajektorie des getriebenen Oszillators.

Lösung (zu gegebenen r, Ω, ω_0) zu einer beliebigen Anfangsbedingung x_0, v_0 gegen die

selbe asymptotische Lösung konvergiert, nennt man sie Grenzykluslösung. Sie entspricht einem Attraktor der Dimension 1. Amplitude und Phase der Grenzykluslösung hängen von den Parametern der Differentialgleichung ab.

Man sieht, dass die Amplitude maximal wird, wenn die Erregerfrequenz Ω der Eigenfrequenz des freien Oszillators ω_0 entspricht. In diesem Fall nimmt die Phase Ψ den Wert $\pi/2$ an. Dieses Verhalten bezeichnet man als Resonanz. Abhängig vom Reibungskoeffizient kann die Amplitude sehr groß werden und den Oszillator - z.B. ein Hochhaus oder eine Brücke - zu so starken Schwingungen anregen, dass er zerstört wird (Resonanzkatastrophe).

3.6 Gekoppelte Oszillatoren

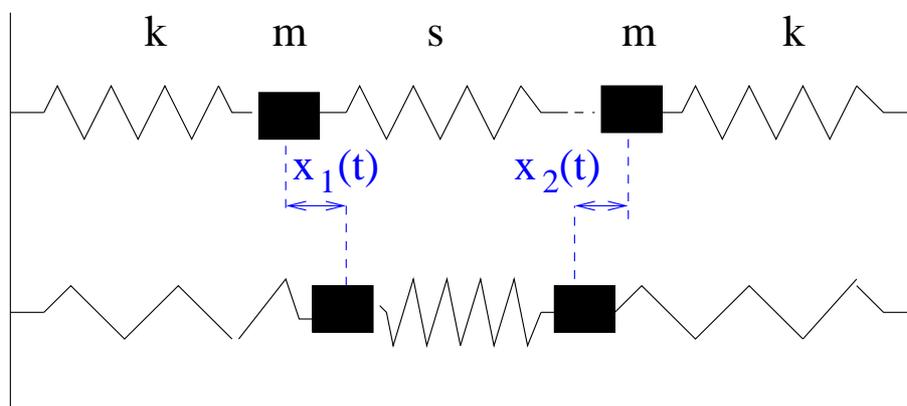


Abb. 3.12: Oszillatorkette

Ein System von zwei gekoppelten Oszillatoren wird beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + s(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - s(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \frac{s}{m}(x_2 - x_1) &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \frac{s}{m}(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

ein gekoppeltes System aus zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung. Mit Hilfe der Substitution

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2 - x_1 & x_1 &= \frac{1}{2}(y_2 - y_1) \\ & & \Leftrightarrow & \\ y_2 &= x_1 + x_2 & x_2 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

lassen sich die Differentialgleichungen entkoppeln. Einsetzen ergibt

$$\frac{1}{2}(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) + \frac{\omega_0^2}{2}(y_2 - y_1) - \frac{s}{m}y_1 = 0 \quad (i)$$

$$\frac{1}{2}(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + \frac{\omega_0^2}{2}(y_1 + y_2) + \frac{s}{m}y_1 = 0 \quad (ii)$$

Durch Addition (i) + (ii) und Subtraktion (ii) - (i) erhält man

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + y_1\left(\omega_0^2 + 2\frac{s}{m}\right) &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \omega_0^2 y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die Oszillatoren entkoppeln in den neuen Koordinaten y_1 und y_2 . Man bezeichnet sie als die Normalschwingungen (Normalmoden) des Systems. Die Lösungen von (3.8) sind

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos(\omega t + \phi_1); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{s}{m}}, \quad \omega > \omega_0 \\ y_2 &= A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2); \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

mit den beiden charakteristischen Frequenzen ω und ω_0 . Um die Normalmoden y_1, y_2 besser interpretieren zu können, transformieren wir in die ursprünglichen Koordinaten zurück

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2}(A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2) - A_1 \cos(\omega t + \phi_1)) \\ x_2(t) &= \frac{1}{2}(A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2) + A_1 \cos(\omega t + \phi_1)) . \end{aligned}$$

Mit bestimmten Anfangsbedingungen x_0, v_0 können wir die folgenden Fälle unterscheiden

(a) $A_1 = 0, A_2 \neq 0, (\phi_1 = \phi_2 = 0)$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2}A_2 \cos \omega_0 t \\ x_2(t) &= \frac{1}{2}A_2 \cos \omega_0 t \equiv x_1(t) \equiv \frac{1}{2}y_2(t) \end{aligned}$$

Beide Oszillatoren schwingen in Phase mit gleicher Amplitude und der natürlichen Frequenz ω_0 . D.h. die mittlere Feder wird nicht aus ihrer entspannten Lage ausgelenkt. Dies entspricht der Normalschwingung $y_2(t)$.

(b) $A_1 \neq 0, A_2 = 0, (\phi_1 = \phi_2 = 0)$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{2}A_1 \cos \omega t = -\frac{1}{2}y_1(t) \\ x_2(t) &= -x_1(t) \end{aligned}$$

Die beiden Oszillatoren schwingen in Gegenphase ($x_2 = -x_1$) mit der größeren Frequenz $\omega > \omega_0$. In dieser Normalschwingung y_1 wird nun auch die mittlere Feder wirksam: dies erklärt die größere Frequenz.

(c) $A_1 = A_2 = a, (\phi_1 = \phi_2 = 0)$:

$$x_1(t) = \frac{a}{2} (\cos \omega_0 t - \cos \omega t)$$

$$x_2(t) = \frac{a}{2} (\cos \omega_0 t + \cos \omega t)$$

Umformung ergibt

$$x_1(t) = a \cdot \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \cdot \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t$$

$$x_2(t) = a \cdot \cos \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \cdot \cos \frac{\omega - \omega_0}{2} t$$

$x_1(t)$ und $x_2(t)$ oszillieren phasenverschoben mit der Frequenz $\frac{\omega_0 + \omega}{2}$. Die Amplitude wird moduliert mit der kleineren Frequenz $\frac{\omega - \omega_0}{2}$ (Beatfrequenz). Mit dieser Modulationsfrequenz tauschen die beiden Oszillatoren Energie aus. Ist die Kopplung zwischen den Oszillatoren groß, gilt $\omega \gg \omega_0$, erfolgt der Energieaustausch schnell.

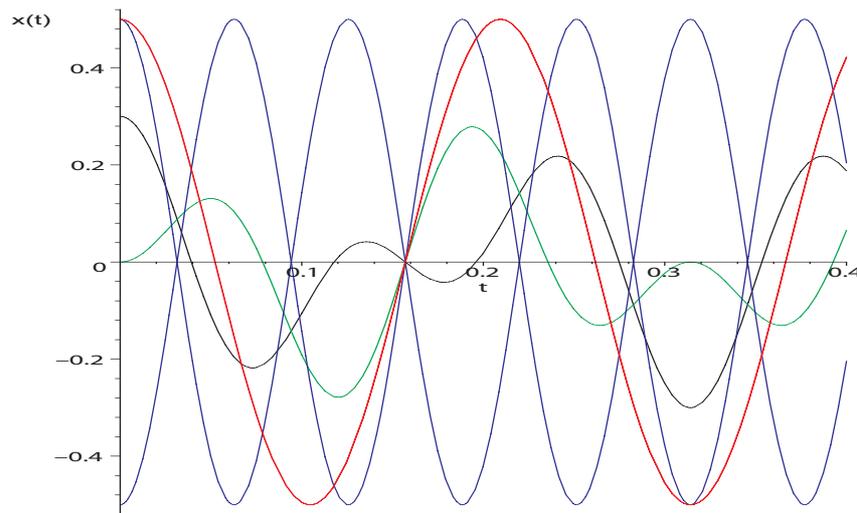


Abb. 3.13: Energieaustausch im gekoppelten Oszillator. Fall a):rot ; Fall b):blau ; Fall c):grün, schwarz

3.7 Nichtlineare Oszillatoren

Das einfachste Beispiel für einen nichtlinearen Oszillator ist das mathematische Pendel. An einem masselosen unendlich steifen Faden der Länge l hängt ein Massenpunkt der Masse m .

Der bewegungsrelevante Anteil der Gravitationskraft ist die nichtlineare Rückstellkraft $-mg \sin \theta$, so dass man als Bewegungsgleichung für das freie mathematische Pendel erhält

$$m\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

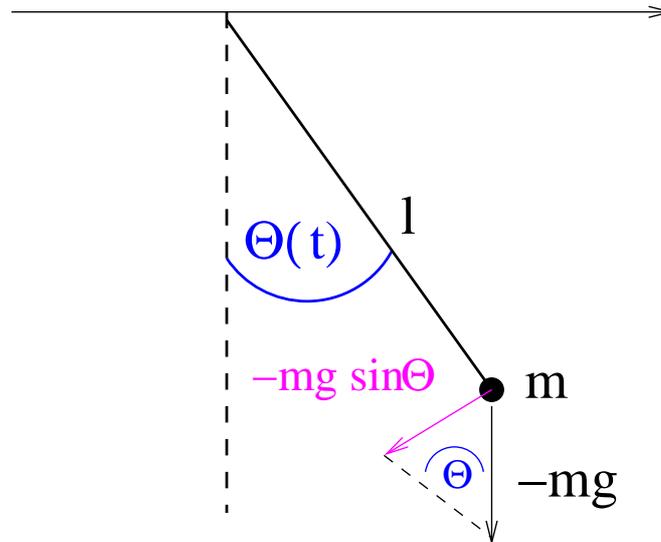


Abb. 3.14: Freies mathematisches Pendel

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 .$$

Darüber hinaus kann man verschiedene Formen eines getriebenen Pendels realisieren:

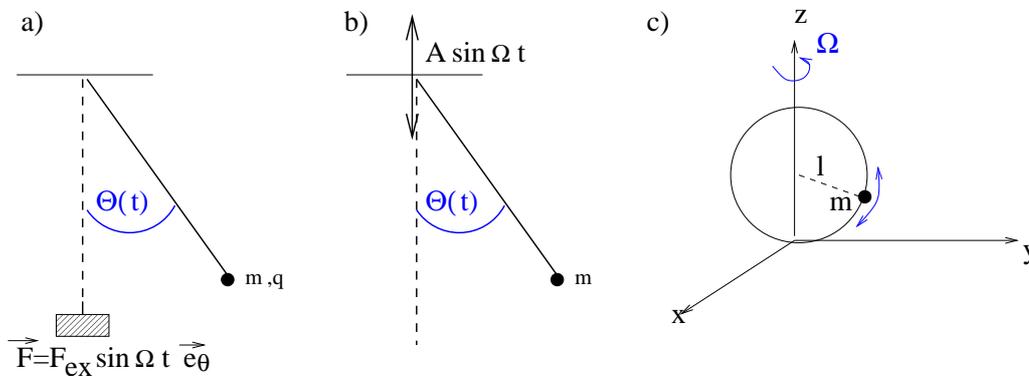


Abb. 3.15: Getriebene Pendel. a) Die Masse ist geladen und wird durch ein elektrisches Wechselfeld der Frequenz Ω entlang der Kreisbahn angestoßen. b) Das parametrisch angeregte Pendel schwingt mit der Frequenz Ω in der Aufhängung. c) Eine Perle bewegt sich auf einem rotierenden (Kreisfrequenz Ω), kreisförmigen Draht.

Die entsprechenden Bewegungsgleichungen lauten in ihrer kanonischen Form

zu a)

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta - r\omega + F_{ex} \sin \Omega t$$

wobei der Reibungsterm nach Stokes proportional zur Winkelgeschwindigkeit ω angenommen wird.

zu b)

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l} \left(1 - \frac{A\Omega^2}{g} \sin \Omega t \right) \sin \theta - r\omega\end{aligned}$$

zu c)

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l} \sin \theta + \frac{1}{2}\Omega^2 \sin 2\theta - r\omega\end{aligned}$$

Wir wollen uns mit den Konsequenzen einer nichtlinearen Rückstellkraft am Beispiel des getriebenen Pendels a) auseinandersetzen.

3.8 Das freie mathematische Pendel

Zunächst werden wir uns einen Überblick darüber verschaffen, wie gut man die nichtlineare Rückstellkraft in einer Potenzreihe entwickeln kann. Man erhält bis zur 7. Ordnung die

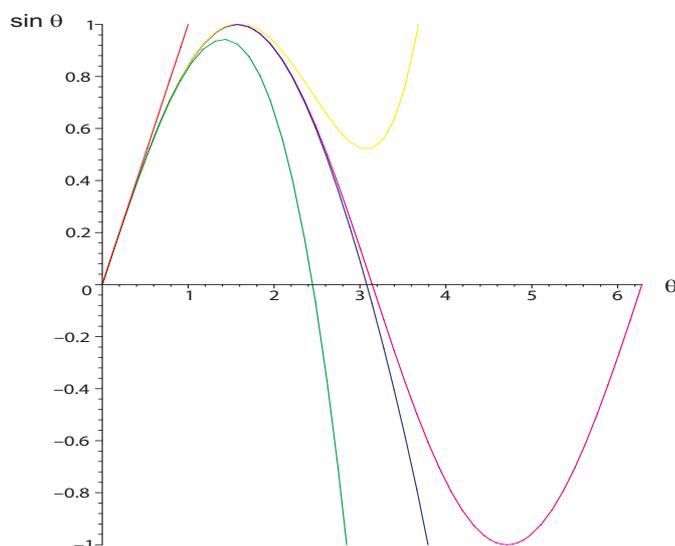


Abb. 3.16: Taylorreihe von $\sin \theta$. θ (rot), $\theta - \frac{1}{6}\theta^3$ (grün), $\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5$ (gelb), $\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \frac{1}{5040}\theta^7$ (blau), exakt (magenta)

Taylorreihe für $\sin \theta$

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \frac{1}{5040}\theta^7 + \mathcal{O}[\theta^9].$$

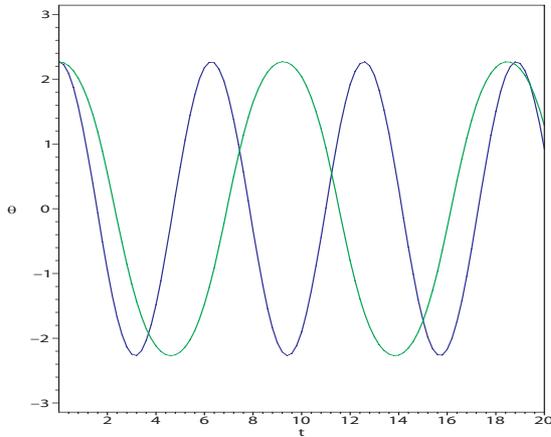


Abb. 3.17: Mathematisches Pendel (grün) im Vergleich mit seiner linearen Näherung (blau). $\theta = \theta(t)$

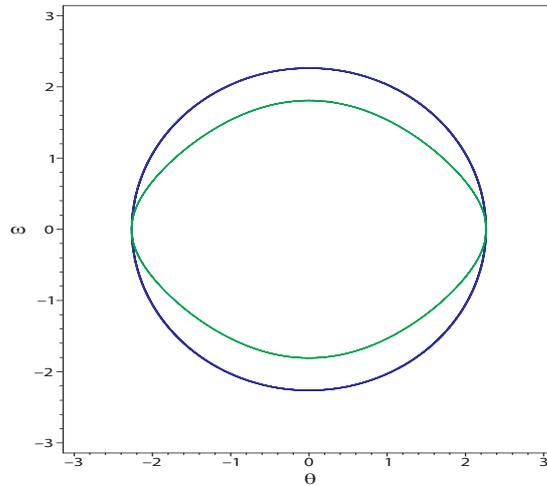


Abb. 3.18: Phasenraumdiagramm des mathematischen Pendels (grün) und seiner linearen Näherung (blau).

Die Taylorreihe enthält nur ungerade Potenzen, da $\sin \theta$ ungerade bezüglich Spiegelung an der Ordinate ist. Wir sehen, dass eine lineare Näherung der Rückstellkraft erstaunlich gut gerechtfertigt ist für Winkel $\theta < 0.4$ (23°).

Mit wachsender Auslenkung sollte sich das mathematische Pendel von einem harmonischen Oszillator unterscheiden. Diesen Unterschied sieht man z.B. für die Anfangsbedingung $\theta = 130^\circ$ in der folgenden Gegenüberstellung.

Während das linearisierte Pendel (blau) durch eine trigonometrische Funktion beschrieben wird, erhält man für die nichtlineare Rückstellkraft (grün) eine elliptische Funktion als Lösung (siehe spezielle Funktionen der Theoretischen Physik). Die Frequenz des nichtlinearen Pendels ist abhängig von der Amplitude: mit wachsender Amplitude wird die Frequenz kleiner. Das Pendel hält sich viel länger in seinen Umkehrpunkten auf als der harmonische Oszillator.

Das mathematische Pendel ist ein konservatives System, d.h. seine mechanische Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E &= T + U \\ &= \frac{1}{2}ml^2\omega^2 + mgl(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

ist eine Erhaltungsgröße. Wir wollen nun die Frage stellen, welche Bewegungsformen für das Pendel bei gegebener Gesamtenergie möglich sind. Dazu betrachten wir die Anfangsbedingung $\omega_0 = 0$, $\theta_0 = \pi$, d.h. das Pendel befindet sich in dem labilen Gleichgewichtspunkt $\theta = \pi$. Die entsprechende Gesamtenergie ist in diesem Fall ($T = 0$)

$$E = U = 2mgl .$$

Man sieht sofort, dass bei der geringsten zusätzlichen kinetischen Energie ($\omega_0 \neq 0$), also für $E > 2mgl$, das System in einen Rotationszustand versetzt wird. Ist andererseits

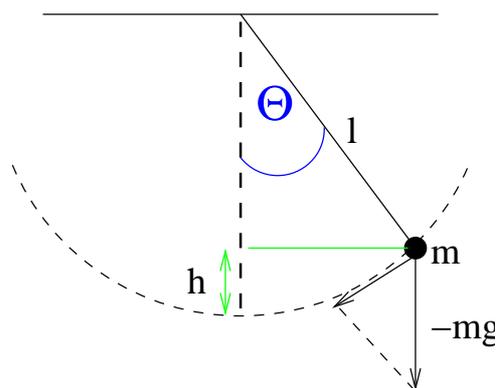


Abb. 3.19: Potentielle Energie im Pendel $U = mgh$, $h = l(1 - \cos \alpha)$

die potentielle Energie etwas geringer ($\theta = \pi - \epsilon$), also $E < 2mgl$, führt das System die gewohnte Pendelbewegung aus. Die Phasenraumtrajektorie für $E = 2mgl$ separiert offenbar den Phasenraum in zwei Teilräume: den Teilraum mit $E > 2mgl$, in dem alle Anfangsbedingungen zu Rotatorlösungen führen und den Teilraum mit $E < 2mgl$, in dem alle Anfangsbedingungen liegen, die eine Pendellösung initiieren. Dies führt uns zum Phasenraum Portrait des mathematischen Pendels. Befindet man sich mit der vorgegebenen Gesamtenergie in der Nähe der Separatrixlösung ($E = 2mgl$), so kann eine kleine Änderung der Energie durch einen äußeren Antrieb spontan die Bewegungsform verändern und so zu einer komplizierten Phasenraumtrajektorie führen.

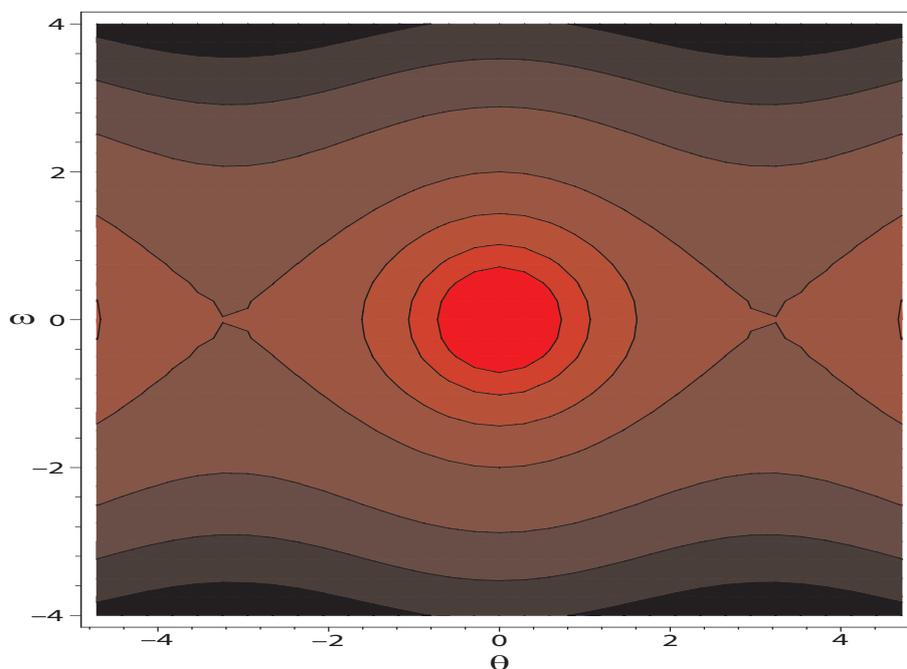


Abb. 3.20: Phasenraum Portrait des mathematisches Pendels

3.9 Das getriebene mathematische Pendel - chaotische Bewegungsformen

Wir betrachten ein Pendel mit Stoke'schem Reibungsterm und einer äußeren periodischen Anregung des Typs der Abbildung (3.15a). In Abhängigkeit von der Kopplungsstärke $F_{ex} = 0, 0.5, 1.2$ der äußeren Anregung beobachtet man verschiedene Bewegungsformen: $F_{ex} = 0$: gedämpfter Oszillator, $F_{ex} = 0.5$: Einschwingvorgang und Grenzzykluslösung des angeregten Oszillators, $F_{ex} = 1.2$: nichtperiodischer Oszillator. Die letzte Bewegungsform

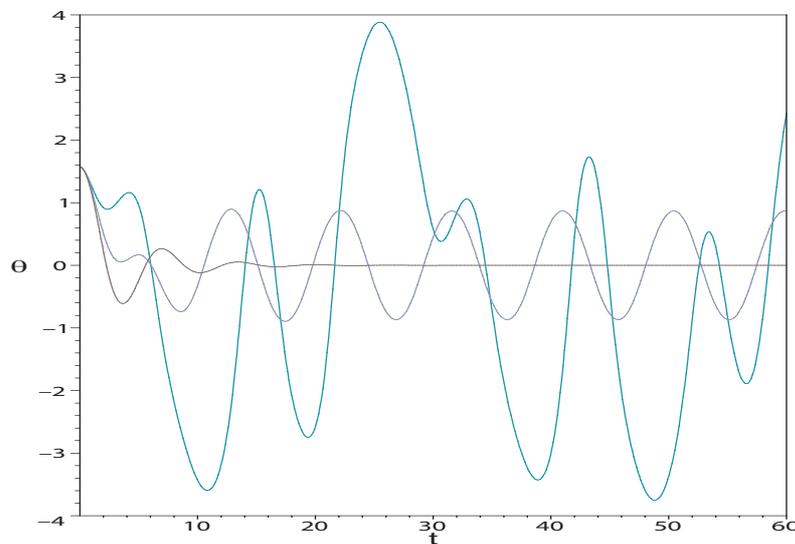


Abb. 3.21: Getriebenes Pendel für $F_{ex} = 0$ (schwarz), 0.5 (blau) und 1.2 (grün).

unterscheidet sich deutlich von dem, was wir bisher unter einem Oszillator verstehen: innerhalb der 60 s ist keine periodische Wiederholung der Schwingungsform erkennbar. Möglich wäre natürlich, dass der Einschwingvorgang für diesen Fall länger dauert, so dass man die Grenzzykluslösung nach 60 s noch nicht erreicht hat. Die folgende Abbildung zeigt eine Phasenraumdarstellung aufgenommen über 600 s . Offenbar unterscheidet sich diese Bewegungsform vollständig von den regulären Lösungen Rotator- oder Pendelbewegung. Sie erscheint vollkommen unvorhersehbar (chaotisch) und trotzdem werden wir im nächsten Abschnitt erste Schritte zu ihrer Analyse kennen lernen.

a) Lyapunovexponent

Wir wollen die Bewegungsform für $F_{ex} = 1.2$ etwas genauer untersuchen. Dazu betrachten wir den Fall, was passiert, wenn wir die Anfangsbedingung minimal bestimmen. D.h. wir vergleichen zwei Lösungen zu Anfangsbedingungen, die sich nur um 1 ppm voneinander unterscheiden und beobachten die Differenz der Lösungen $\Delta\theta = \theta_2(t) - \theta_1(t)$ über die Zeit (Abb. 3.24). Man sieht an der halblogarithmi-

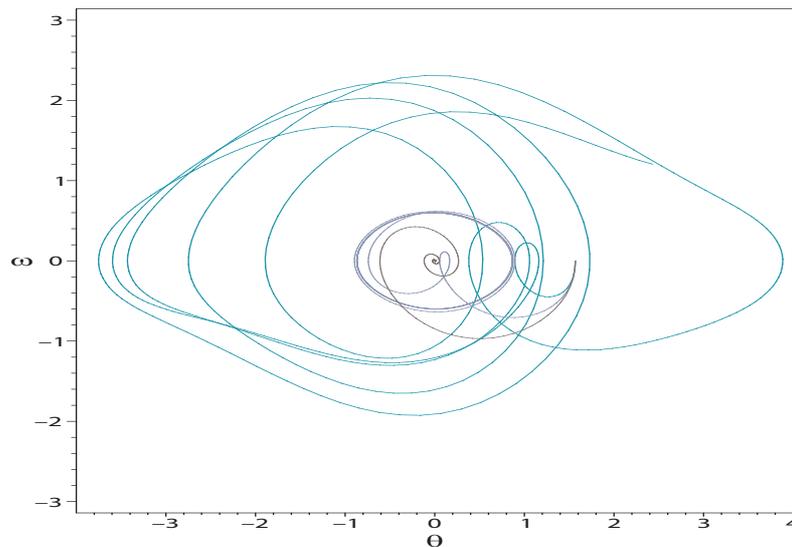


Abb. 3.22: Phasenraumtrajektorie des getriebenen Pendels.

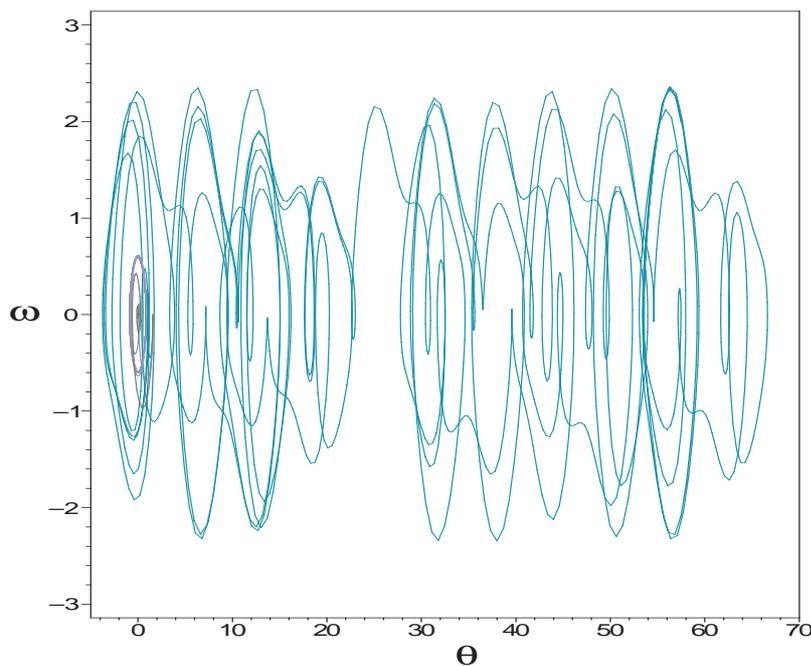


Abb. 3.23: Phasenraumtrajektorie für $F_{ex} = 1.2$ für $t \in [0, 600s]$.

schen Darstellung, dass die Differenz $\Delta\theta$ der Lösungen für die Fälle $F_{ex} = 0, 0.5$ im Mittel exponentiell abfällt, während sie für den Fall $F_{ex} = 1.2$ exponentiell zunimmt. Während im Fall der regulären Bewegungsformen alle Lösungen unabhängig von den Anfangsbedingungen gegen eine stabile asymptotische Lösung konvergieren (stabile Punktösung für $F_{ex} = 0$, stabiler Grenzzyklus für $F_{ex} = 0.5$), ist dies für die irreguläre Lösung nicht der Fall: die Lösungen zu minimal unterschiedlichen

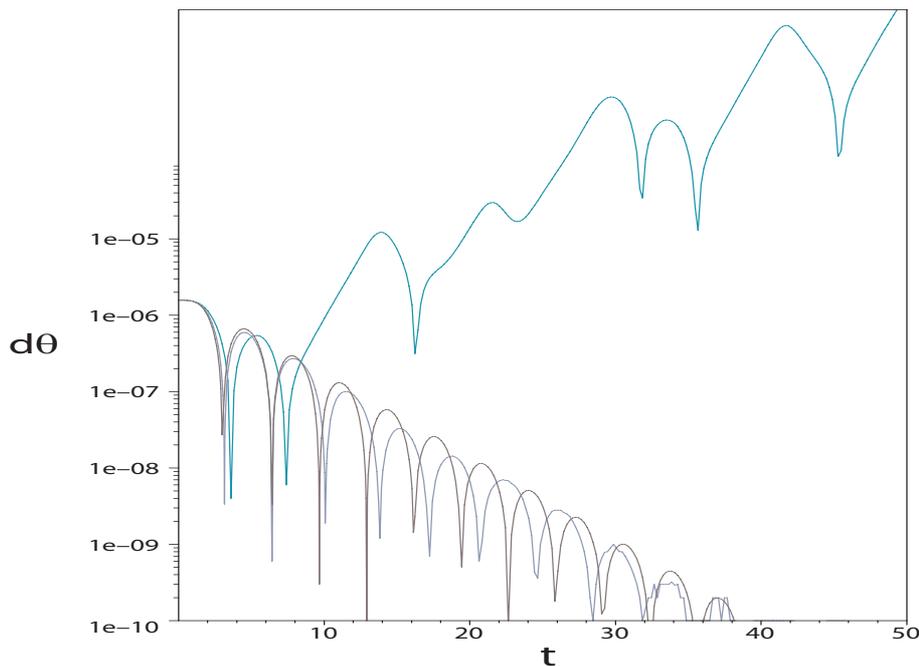


Abb. 3.24: Lyapunovexponent λ für reguläre und chaotische Bewegungsformen

Anfangsbedingungen streben exponentiell auseinander. Die Steigung der mittleren Differenz $\Delta\theta$ in der halblogarithmischen Darstellung nennt man Lyapunovexponent. Ist der Lyapunovexponent positiv, so verhält sich eine Lösung chaotisch.

b) Poincare Schnitte

Ein weiteres nützliches Hilfsmittel zur Analyse chaotischer Systeme sind Poincare Schnitte. In diesem Fall zeichnet man z.B. nur solche Punkte des Phasenraumes, die in Phase mit der äußeren Anregung sind. Diese Bedingung wirkt in Analogie zu einem Stroboskop: Betrachtet man eine schnell rotierende Scheibe mit einer Aufschrift, so lässt sich der Text nicht lesen. Beleuchtet man jedoch die Scheibe mit einem Stroboskop in Phase (also z.B. immer, wenn die Schrift aufrecht steht), so erscheint der Text in Ruhe und man kann ihn gut erkennen. Übertragen auf das getriebene mathematische Pendel sammeln wir alle erreichbaren Phasenraumpunkte zu den Zeiten (Aufblitzen der Stroboskoplampe) $t_n = \frac{4\pi}{\Omega}$. Für eine reguläre Bewegung ($F_{ex} = 0,0.5$) würde man nach einem kurzen Einschwingverhalten genau einen Punkt sehen, da die Bewegungsformen asymptotisch durch einen Attraktor (Fokus bzw. Grenzzyklus) bestimmt sind. Im Fall der chaotischen Lösung könnte man erwarten, dass der erreichbare Phasenraum lückenlos erfüllt wird: man findet aber eine regelmäßige Struktur. Das Pendel kehrt immer wieder in bestimmte Regionen des Phasenraumes zurück. Vergrößert man diese Regionen sieht man, dass sie sich immer nur aus isolierten Phasenpunkten zusammensetzen: man sagt die Dimension des Attraktors (also jenes Gebiet des Phasenraumes, zu dem die Lösung immer wiederkehrt) ist fraktal. Es handelt sich also weder um eine Raumkurve (Dimension 1), noch um eine Raumfläche (Dimension 2). Solche Attraktoren mit fraktaler Di-

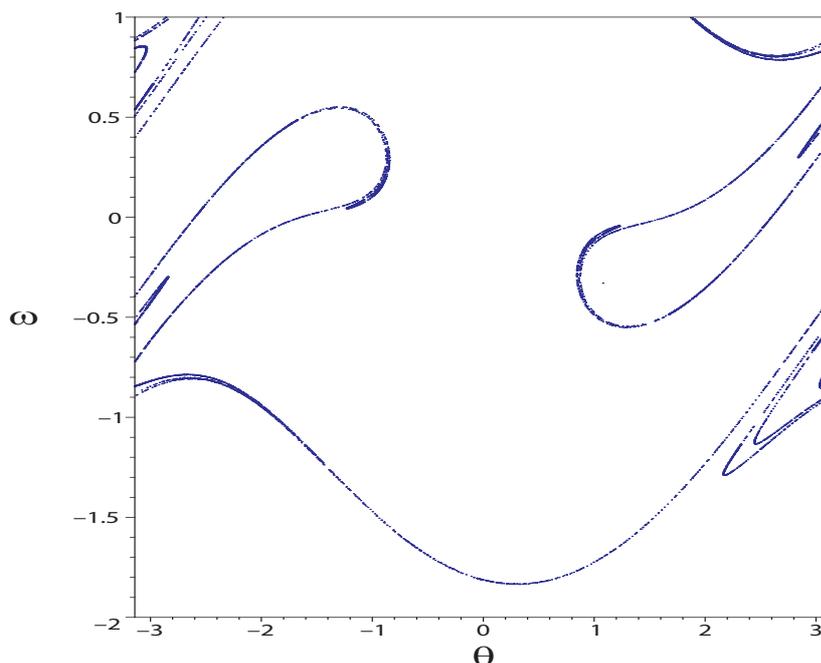


Abb. 3.25: Seltsamer Attraktor des mathematischen Pendels

mension nennt man seltsame Attraktoren. Sie sind charakteristisch für chaotische Systeme.

- c) Periodenverdopplung - ein Weg zum Chaos Bisher haben wir zwei typischen chaotischen Bewegungsformen diskutiert: (i) die extreme Abhängigkeit einer chaotischen Lösung von ihrer Anfangsbedingung und (ii) die charakteristische topologische Struktur ihres seltsamen Attraktors. In diesem Abschnitt wollen wir der Frage nachgehen, inwieweit sich der Übergang zwischen einer regulären und einer chaotischen Bewegungsform durch Variation der äußeren Kraft F_{ex} ankündigt. Dazu betrachten wir in der folgenden Abbildung drei reguläre Lösungen des getriebenen Pendels für die Kopplungsstärken $F_{ex} = 1.35, 1.44, 1.465$. Nach einem Einschwingvorgang ($t \approx 20$) findet man eine reguläre Grenzzykluslösung mit Periode T für $F_{ex} = 1.35$. Ändert man den Wert für F_{ex} , stellt man fest, dass sich die Periode der Grenzzykluslösung bei einem bestimmten Wert spontan verdoppelt (für $F_{ex} = 1.44$ erkennt man verschieden hohe Maxima, bevor sich die Lösung periodisch wiederholt). Eine kleine Vergrößerung von F_{ex} bewirkt eine weitere spontane Verdopplung der Periode, bis man im Grenzfall unendlich vieler Periodenverdopplungen eine irreguläre (chaotische) Lösung erhält.

Trägt man die auf das Intervall $[0, 1]$ normierten Maxima von $\theta(t)$ als Funktion von F_{ex} auf, so erhält man ein Bifurkationsdiagramm (Bifurkation: Gabelung), das in immer kürzeren Abständen des Kontrollparameters F_{ex} Verzweigungspunkte aufweist, bis im Grenzfall unendlicher Verzweigung die Maxima beliebig dicht liegen, die Bewegung schließlich chaotisch wird.

Dabei genügt die Folge der Bifurkationspunkte F_n einer universellen Regel: Definiert

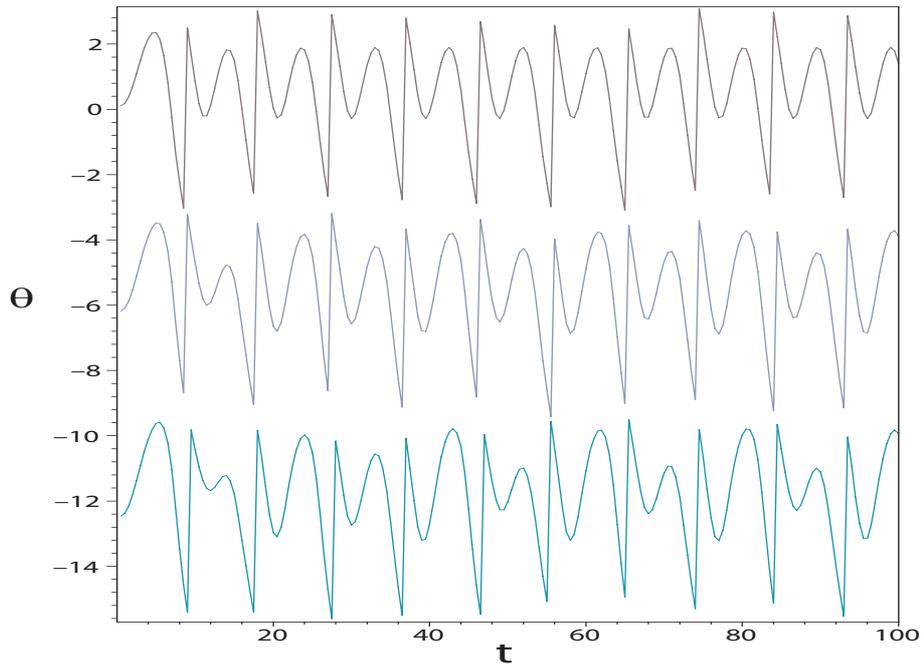


Abb. 3.26: Periodenverdopplungen regulärer Lösungen für a) $F_{ex} = 1.35$, b) $F_{ex} = 1.44$ und c) $F_{ex} = 1.465$

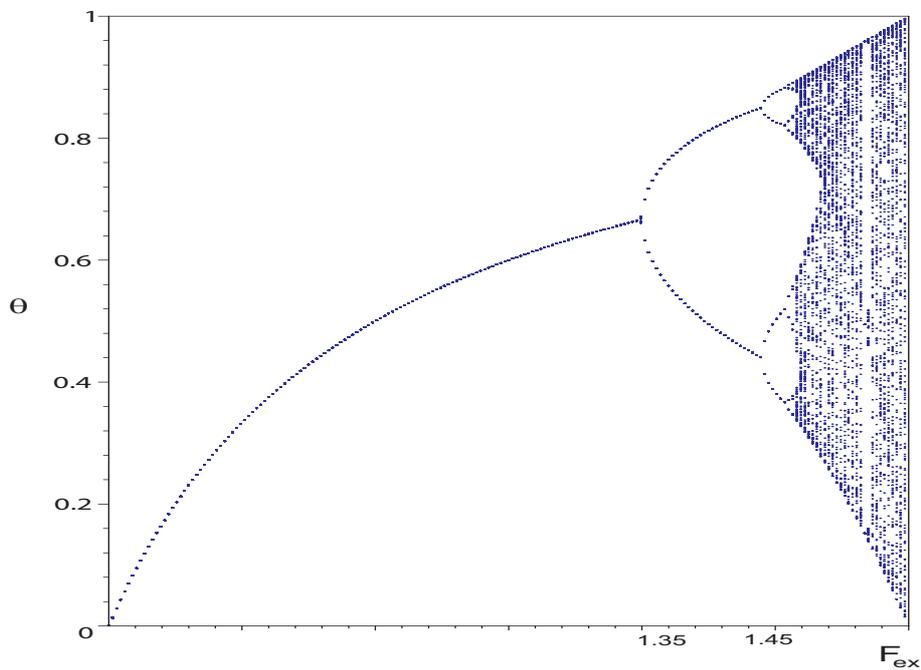


Abb. 3.27: Feigenbaumdiagramm (Bifurkationsdiagramm)

man das Abstandsmaß

$$\delta_n = \frac{F_{n+1} - F_n}{F_{n+2} - F_{n+1}},$$

so findet man als Grenzwert den universellen Feigenbaumparameter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \delta = 4.6692016091 \dots$$

Für alle Systeme, deren reguläre Lösungen durch Periodenverdopplung in chaotische Lösungen übergehen, erhalten wir den Feigenbaumparameter als Grenzwert der Folge $\{\delta_n\}$. Wir haben somit ein eindeutiges Maß dafür, wie "nahe" wir uns an einer chaotischen Lösung befinden. Dieses Maß δ_n könnte man z.B. als "Regler" benutzen, um den Parameter F_{ex} so zu kontrollieren, dass die Lösungen z.B. immer regulär bleiben.

Kapitel 4

Bewegung zweier Massenpunkte

Betrachte zwei Massenpunkte, die durch eine interne Kraft (z.B. Feder oder Gravitation) verbunden sind und sich als System durch den Raum bewegen:

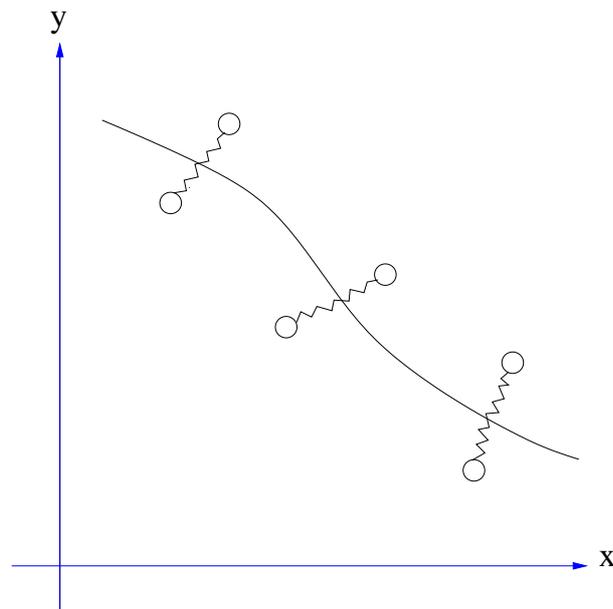


Abb. 4.1: Bewegung zweier Massenpunkte

- a) Für einen Beobachter, der sich auf einer gedachten Verbindungslinie zwischen den Massenpunkten aufhält, werden sich die beiden Massen z.B. wie ein eindimensionaler Oszillator verhalten.
- b) Für einen weit entfernten Beobachter bewegt sich das Gesamtsystem entlang einer Trajektorie, ohne dass Details der Bewegung beider Massen relativ zueinander sichtbar wären.

Diese Zerlegung der Bewegung, in die des Systems und die relative Bewegung der Massenpunkte zueinander, ist der Leitfaden für die folgenden Überlegungen.

4.1 Der Schwerpunkt - Bewegung des Systems

Wir betrachten zwei Massenpunkte in einem äußeren Kraftfeld. Die wirksamen Kräfte ergeben sich aus der internen Wechselwirkung zwischen den Massenpunkten und den externen Kräften \vec{F}_j^{ext} .

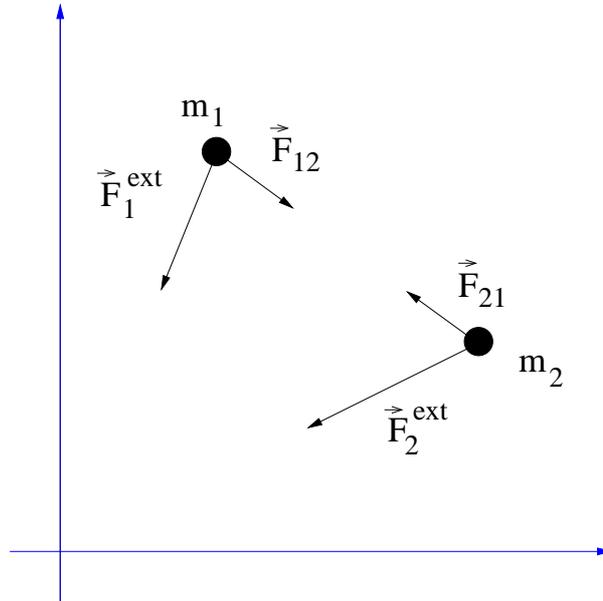


Abb. 4.2: Bewegung von zwei gravitativ wechselwirkenden Massenpunkten in einem äußeren Kraftfeld.

Damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{ext} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{ext} \end{aligned} ,$$

wobei für die internen Kräfte nach Newton's 3. Gesetz (*actio gleich reactio*) gilt

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} .$$

Addiert man die beiden Bewegungsgleichungen, so erhält man

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} \equiv \vec{F}^{ext} .$$

Im nächsten Schritt führen wir eine neue Koordinate ein, den Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \\ M &= m_1 + m_2 \end{aligned}$$

und erhalten für die addierten Bewegungsgleichungen

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ext} . \quad (4.1)$$

D.h. das Gesamtsystem bewegt sich wie ein fiktiver Massenpunkt der Masse M am Ort \vec{R} im externen Kraftfeld $\vec{F}^{ext} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$.

Bemerkungen

- (i) Man nennt das System von Massenpunkten isoliert oder abgeschlossen, wenn keine äußeren Kräfte wirken, also $\vec{F}^{ext} = 0$. Dann ist

$$M\ddot{\vec{R}} = 0 \quad \rightarrow \quad M\dot{\vec{R}} \equiv \vec{P} = \text{const.}$$

der Summenimpuls $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ des Systems (Schwerpunktimpuls) eine Erhaltungsgröße (Impulserhaltung).

- (ii) Die externe Kraft \vec{F}^{ext} ist im allgemeinen keine Zentralkraft (siehe Abb. 4.2: die Überlagerung von \vec{F}_1^{ext} und \vec{F}_2^{ext} ist vom Schwerpunkt aus gesehen nicht auf das äußere Kraftzentrum gerichtet).

- (iii) Einen Sonderfall stellen konstante externe Kräfte dar (z.B. erdnahe Gravitation). In diesem Fall gilt

$$M\ddot{\vec{R}} = -m_1\vec{g} - m_2\vec{g} = -M\vec{g} \quad \rightarrow \quad \ddot{\vec{R}} = -\vec{g} .$$

Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich wie ein Massenpunkt der Masse M mit konstanter Beschleunigung.

4.2 Die Relativkoordinate - Interne Bewegung der Massenpunkte

Ist das äußere Kraftfeld 0 oder konstant ($\frac{1}{m_1}\vec{F}_1^{ext} = \frac{1}{m_2}\vec{F}_2^{ext} = \vec{g}$), so erhält man durch Subtraktion der Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}^{int} ,$$

mit

$$\vec{F}^{int} \equiv \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} .$$

Führt man die Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und die reduzierte Masse μ ein

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} ,$$

so erhält man

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{int} \tag{4.2}$$

wiederum die Bewegungsgleichung eines fiktiven Massenpunktes der Masse μ .

Wir haben somit mit der Einführung der Schwerpunkt- und Relativkoordinate das Zweiteilchenproblem in zwei ungekoppelte Einteilchenprobleme abgebildet

$$\begin{aligned} M\ddot{\vec{R}} &= \vec{F}^{ext} = M\vec{g} \\ \mu\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}^{int} . \end{aligned}$$

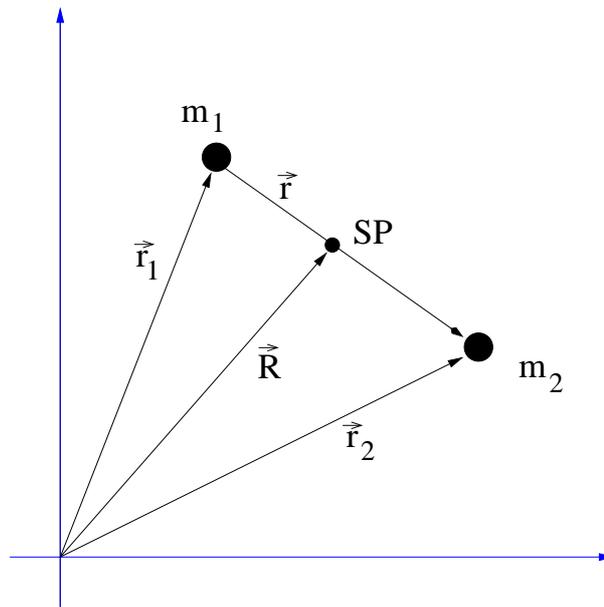


Abb. 4.3: Schwerpunkt- und Relativkoordinaten im Zweiteilchensystem

4.3 Stöße

Stöße zwischen zwei Massenpunkten entstehen dadurch, dass die Massen aus großer Entfernung wechselwirkungsfrei aufeinander zufliegen, bei kleinen Abständen infolge ihrer Wechselwirkung aneinander streuen und wieder frei auseinander fliegen. Ist das System isoliert, gilt Impulserhaltung: der Summenimpuls vor der Streuung ist gleich dem Summenimpuls nach der Streuung

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \ .$$

Dabei bedeuten \vec{u}_j die Geschwindigkeiten der Massenpunkte vor dem Stoß und \vec{v}_j die Geschwindigkeiten nach dem Stoß. Aus Kenntnis von \vec{v}_j in Abhängigkeit von vorgegebenen Anfangsgeschwindigkeiten \vec{u}_j möchte man etwas über den Vorgang innerhalb der Wechselwirkungszone lernen.

4.3.1 Elastische Stöße

Ist die interne Wechselwirkung \vec{F}^{int} zwischen den Massenpunkten konservativ, so gilt zusätzlich zur Impulserhaltung auch die Energieerhaltung, d.h. die Summen der kinetischen Energien außerhalb der Wechselwirkungszone vor und nach dem Stoß sind identisch

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \ .$$

Solche Streuvorgänge nennt man elastische Stöße.

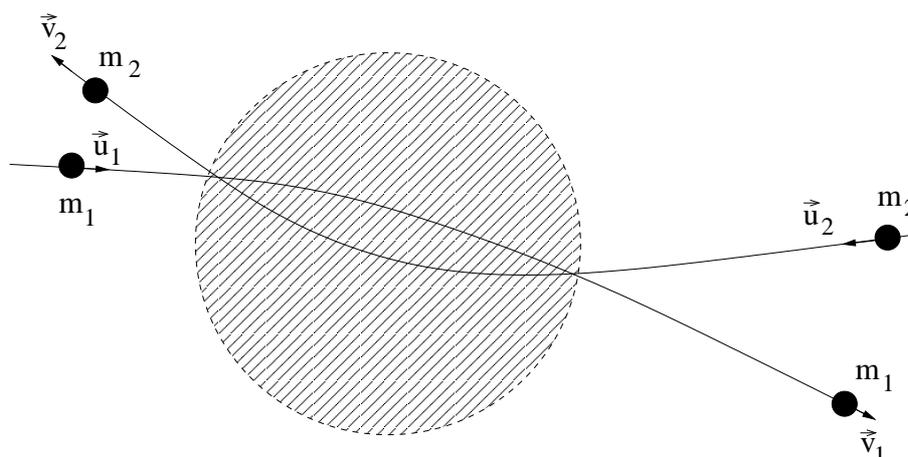


Abb. 4.4: Prinzip eines Zweiteilchenstoßes. Die Wechselwirkungszone ist schraffiert dargestellt.

Beispiele:

B4.1 Eindimensionaler elastischer Stoß (zentraler Stoß)

Gegeben sind die Anfangsgeschwindigkeiten u_j zweier Massenpunkte. Bestimme die Endgeschwindigkeiten v_j nach einem elastischen Stoß. Die Energieerhaltung liefert

$$m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2) \quad (4.3)$$

und die Impulserhaltung

$$m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2) \quad . \quad (4.4)$$

Das Verhältnis von (4.3) zu (4.4) ergibt nach dem 3. binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} v_1 + u_1 &= u_2 + v_2 & (4.5) \\ v_{rel} \equiv v_1 - v_2 &= -(u_1 - u_2) \equiv -u_{rel} \quad . \end{aligned}$$

Man sieht, dass die Relativgeschwindigkeit im zentralen elastischen Stoß die Richtung umkehrt. Aus (4.5) und (4.4) folgt

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{M} (2m_2 u_2 + (m_1 - m_2) u_1) \\ v_2 &= \frac{1}{M} (2m_1 u_1 + (m_2 - m_1) u_2) \quad . \end{aligned}$$

Wir betrachten einige Spezialfälle für $u_2 = 0$ (ruhendes Target (Zielmasse)):

(i) $m_1 = m_2 = m$:

In diesem Fall ist $v_1 = 0$ und $v_2 = u_1$. D.h. die kinetische Energie der Projektilmasse m_1 wird vollständig auf die Targetmasse m_2 übertragen.

- (ii) $m_1 > m_2$:
Es gilt

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)u_1}{M} > 0$$

$$v_2 = \frac{2m_1u_1}{M} > 0 .$$

Beide Massen fliegen in positiver Richtung weiter mit $v_1 < v_2$.

- (iii) $m_1 < m_2$:
Beide Massen bewegen sich nach dem Stoß relativ zueinander in entgegengesetzter Richtung mit den Geschwindigkeiten

$$v_1 = -\frac{(m_2 - m_1)u_1}{M} < 0$$

$$v_2 = \frac{2m_1u_1}{M} > 0 .$$

Für den Spezialfall $m_1 \ll m_2$ ergibt sich dann

$$v_1 \approx -u_1$$

$$v_2 \approx 0 .$$

(Bsp.: Schuss eines Balles (m_1) gegen eine Wand (m_2)).

B4.2 Elastischer Stoß zweier fallender Bälle unterschiedlicher Masse

Ein Tischtennisball der Masse m_1 und ein Hartgummiball der Masse m_2 fallen aus einer Höhe h_0 senkrecht nach unten.

Welche Höhe erreicht der Tischtennisball nach dem Auftreffen maximal?

- α) Im ersten Schritt bestimmen wir die Auftreffgeschwindigkeit der Bälle aus dem Energiesatz

$$(m_1 + m_2)gh_0 = (m_1 + m_2)\frac{u_0^2}{2} \rightarrow u_0 = -\sqrt{2gh_0} .$$

- β) Die zweite Phase ist bestimmt durch zwei kurz aufeinanderfolgende elastische Stöße

- $\beta 1$) m_2 trifft elastisch auf den Boden ($y = 0$) auf und kehrt seinen Impuls um.
 $\beta 2$) m_1 und m_2 stoßen zusammen (fast am Boden, wo sie keine potentielle Energie besitzen), so dass m_1 eine Geschwindigkeit nach oben erhält.

Daraus erhält man die Geschwindigkeit der Massen vor ihrem Zusammenstoß (wegen $\beta 1$)

$$u_1 = u_0$$

$$u_2 = -u_0$$

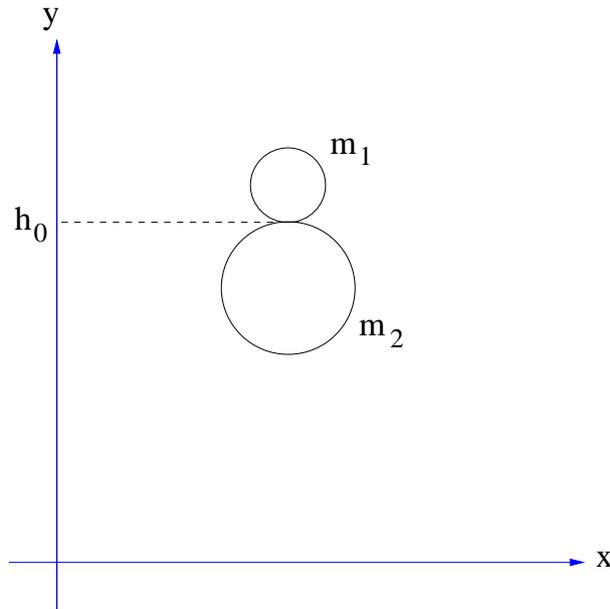


Abb. 4.5: Ballspiele

und die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stoß aus Impuls- und Energieerhaltung

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = u_0(m_1 - m_2) = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (4.6)$$

$$(m_1 + m_2) u_0^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 . \quad (4.7)$$

Zur Bestimmung der Flughöhe benutzen wir wieder die Energieerhaltung für die Masse m_1 (senkrechter Wurf nach oben)

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g h . \quad (4.8)$$

Damit ergibt sich aus (4.6)

$$v_2 = -\sqrt{2gh_0} \frac{m_1 - m_2}{m_2} - \frac{m_1}{m_2} v_1$$

und Einsetzen in (4.7)

$$v_1 = \sqrt{2gh_0} \frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2} .$$

Aus (4.8) erhält man mit v_1

$$h = h_0 \frac{(3m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} .$$

Die maximal erreichbare Höhe erhalten wir für $m_2 \gg m_1$, so dass wir m_1 gegenüber m_2 vernachlässigen können, also

$$h_{max} = h_0 \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = 9 h_0 .$$

4.3.2 Inelastische Stöße

Ist die Kraft zwischen den zwei Massenpunkten nicht konservativ sondern dissipativ, so geht mechanische Energie durch Reibung verloren.

B4.3 Ballistisches Pendel

Bestimme die Geschwindigkeit eines Geschosses, das in einem frei aufgehängten Sandsack aufgefangen wird.

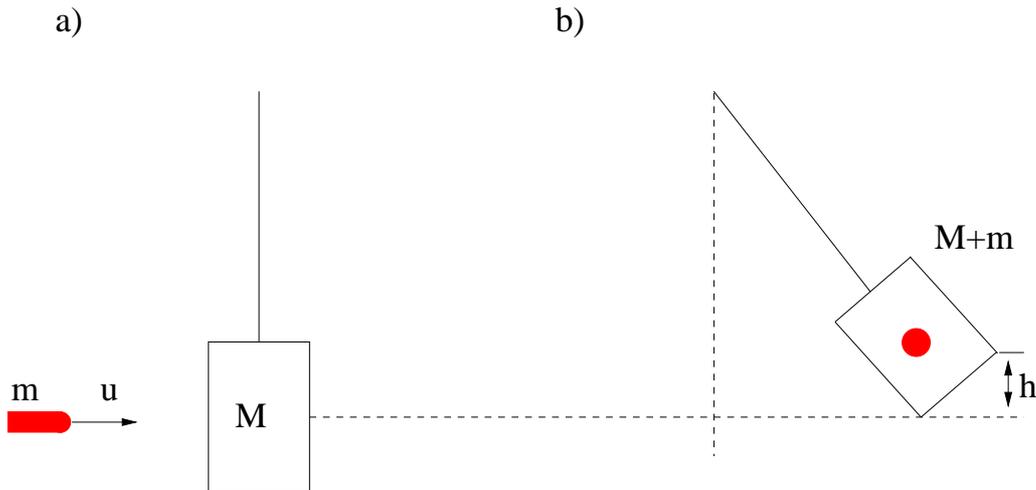


Abb. 4.6: Messung von u aus der Höhe h des ballistischen Pendels. a) vor dem Stoß b) nachdem das Geschoss vom Sandsack M eingefangen wurde.

Es gilt Impulserhaltung für das abgeschlossene System: Da das Pendel vor dem Stoß in Ruhe ist, gilt

$$m \cdot u = (M + m) \cdot V \quad . \quad (4.9)$$

Dabei ist u die gesuchte Geschwindigkeit des Geschosses und V die Geschwindigkeit des Pendels der Masse M , nachdem es das Geschoss eingefangen hat. Nach dem Stoß gilt Energieerhaltung für das frei schwingende Pendel, also

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh \quad . \quad (4.10)$$

h ist die Höhe der Pendelmasse im Umkehrpunkt. Für den Stoß selbst gilt keine Energieerhaltung, da die Kugel in der Pendelmasse abgebremst wird und dabei die Reibungsenergie Q abgibt

$$\frac{1}{2}mu^2 = (M + m)gh + Q \quad . \quad (4.11)$$

Aus (4.10) folgt

$$V = \sqrt{2gh} \quad .$$

Einsetzen in (4.9) liefert

$$u = \sqrt{2gh} \frac{M + m}{m} \quad .$$

Wenn man aus dem Maximalausschlag des Pendels h bestimmt, erhält man die Geschwindigkeit des Projektils.

Wie groß ist dann die Reibungsenergie Q ? Aus (4.11) erhält man

$$Q = \frac{1}{2}mu^2 - (M + m)gh .$$

Der Anteil der Reibungsenergie an der ursprünglichen kinetischen Energie der Kugel beträgt

$$\frac{Q}{\frac{1}{2}mu^2} = 1 - \frac{(M + m)gh}{\frac{1}{2}mu^2} = 1 - \frac{(M + m)gh}{\frac{1}{2}m2gh\frac{(M+m)^2}{m^2}} = 1 - \frac{m}{M + m} = \frac{M}{M + m} .$$

Ein Zahlenbeispiel soll verdeutlichen, wie groß der Anteil der Reibungsenergie tatsächlich ist: Masse des Projektils $m = 0.01kg$, Masse des Sandsacks $M = 70kg$:

$$\frac{Q}{\frac{1}{2}mu^2} = \frac{70}{70.01} = 0.999986 .$$

D.h. 99,99% der kinetischen Energie des Projektils wird in Reibungsenergie umgesetzt.

4.4 Schwerpunkt- und Relativkoordinaten eines Systems mit N Massenpunkten

Wir betrachten wieder ein abgeschlossenes System, z.B. ein untereinander gravitativ gebundenes System von N Massenpunkten (beispielsweise Sternhaufen, Galaxien). Die Bewegung der Massenpunkte wird nur durch die internen Kräfte bestimmt

$$m_j \cdot \ddot{\vec{r}}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^N \vec{F}_{ji} \quad j = 1, \dots, N .$$

Wegen *actio=reactio* ist $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ und man erhält durch Addition aller Bewegungsgleichungen

$$\sum_{j=1}^N m_j \ddot{\vec{r}}_j = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N \vec{F}_{ji} = 0 .$$

Definiert man den Schwerpunkt des Systems

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

$$M = \sum_{i=1}^N m_i ,$$

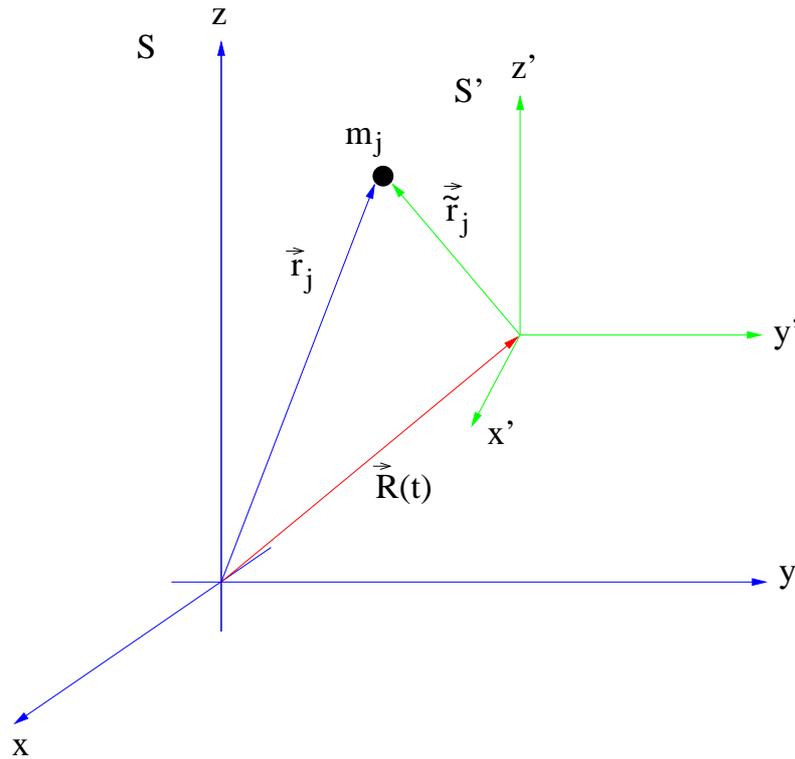


Abb. 4.7: Zusammenhang zwischen Labor- und Schwerpunktsystem: Galilei Transformation mit $\vec{r}_j = \vec{r}'_j + \vec{R}(t)$, falls $\ddot{\vec{R}} = 0$.

so erhält man

$$M\ddot{\vec{R}} = 0 = \dot{\vec{P}}$$

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^N \vec{p}_j = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j = \text{const.}$$

die Impulserhaltung: der Summenimpuls eines abgeschlossenen Systems von Massenpunkten ist eine Erhaltungsgröße. Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich somit mit konstanter Geschwindigkeit durch den Raum und definiert ein Inertialsystem. Bezogen auf dieses Schwerpunktsystem ist die Relativkoordinate

$$\vec{r}'_j = \vec{r}_j - \vec{R}$$

und es gilt mit ($\ddot{\vec{R}} = 0$)

$$m_j \ddot{\vec{r}}'_j = \sum_{i=1, i \neq j}^N \vec{F}_{ji} .$$

Bemerkungen:

- (i) Das SP-System eines abgeschlossenen Systems von Massenpunkten ist ein Inertialsystem.

- (ii) Die Bewegungsgleichungen im Labor- und im SP-System sind Form invariant. Daraus resultiert das Relativitätsprinzip der Mechanik:
Jedes Inertialsystem ist gleichwertig zur Beschreibung einer Bewegung.

4.5 Bewegung einer Rakete

Eine Rakete bewegt sich im kräftefreien Raum unter dem Einfluss ihres Triebwerks. Mit hoher Geschwindigkeit v_{rel} werden Antriebsgase relativ zur Rakete ausgestoßen und beschleunigen somit das Raumschiff. Sei $m(t)$ die Masse der Rakete (Treibstoff, Raketenhülle und Nutzlast) zur Zeit t und $\mu = -\frac{dm}{dt}$ der konstante Gasausstoß pro Zeiteinheit (Beachte: die Masse der Rakete nimmt ab, deshalb ist $\frac{dm}{dt} < 0$ und damit $\mu > 0$). Die Austrittsgeschwindigkeit der Gase $u(t)$ von der Erde (Laborsystem) aus betrachtet, ist

$$u(t) = v(t) - v_{rel} .$$

Dabei ist $v(t)$ die momentane Geschwindigkeit der Rakete und v_{rel} , wie oben erwähnt, die konstante Austrittsgeschwindigkeit der Gase relativ zur Rakete. Da keine äußeren Kräfte wirken, gilt für das System Rakete und ausströmende Gase die Impulserhaltung

$$\begin{aligned} p(t) &= m(t)v(t) \\ &= p(t+dt) = (m(t)+dm)(v(t)+dv) + (-dm)(u(t)+du) . \end{aligned}$$

Dabei setzt sich der **Impuls des Systems zur Zeit $t+dt$** zusammen aus dem **Impuls der Rakete zur Zeit $t+dt$** und dem **Impuls der ausströmenden Gase**. Ausmultipliziert ergibt sich

$$m(t)v(t) = m(t)v(t) + m(t)dv + dm v(t) - dm u(t) + dm(dv - du) .$$

Beachtet man, dass wegen der Konstanz von v_{rel}

$$v(t) - u(t) = v_{rel} \rightarrow dv - du = 0$$

gilt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} m dv + v dm - u dm &= 0 \\ m \frac{dv}{dm} + v_{rel} &= 0 . \end{aligned}$$

Wir erhalten somit eine Differentialgleichung für $v(m)$ bzw. $m(v)$, die wir mit Hilfe der Separation der Variablen lösen können (wähle als Anfangsbedingung $v(0) = 0$)

$$\begin{aligned} dv &= -v_{rel} \frac{dm}{m} \Bigg| \int \\ v(t) - v(0) &= -v_{rel} (\ln m(t) - \ln m(0)) \\ v(t) &= v_{rel} \ln \frac{m(0)}{m(t)} \\ \frac{m(0)}{m(t)} &= \exp \left(\frac{v(t)}{v_{rel}} \right) \\ m(t) &= m(0) e^{-\frac{v(t)}{v_{rel}}} . \end{aligned}$$

Wir wollen nun betrachten, was passiert, wenn wir allen Treibstoff zur Beschleunigung der Rakete verbrauchen. Sei T die Brenndauer der Rakete, also die Zeit, in der aller Treibstoff verbraucht ist. Dann setzt sich $m(T)$ aus der Masse der Nutzlast und der Raketenhülle zusammen. Dann gilt:

B4.4 Endgeschwindigkeit der Rakete

Nutzlast und Raketenhülle betragen 1‰ der Startmasse $m(0)$. Welche Endgeschwindigkeit erreicht die Rakete?

$$m(0) = 1000 \cdot m(T) \quad \rightarrow \quad v(T) = v_{rel} \ln \frac{1000 \cdot m(T)}{m(T)} = 6.9 \cdot v_{rel} \quad .$$

Beachten Sie: die Endgeschwindigkeit ist proportional zur Austrittsgeschwindigkeit der Gase. Bei heutigen Raketenmotoren ist $v_{rel} \approx 3 \frac{km}{s}$, die theoretische Endgeschwindigkeit somit $v(T) \approx 21 \frac{km}{s}$.

B4.5 Treibstoffmenge der Rakete

Sei $v_{rel} = 3 \frac{km}{s}$. Wie groß muss die Treibstoffmenge sein, um eine Nutzlast von 1 kg auf 1% der Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen? ($c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$)

Aus

$$m(T) = m(0) e^{-\frac{v(T)}{v_{rel}}}$$

erhält man

$$\begin{aligned} 1 &= m(0) e^{-\frac{0.01c}{v_{rel}}} \\ m(0) &= \exp\left(\frac{3 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^3}\right) = e^{1000} \text{ kg} \\ m(0) &= 10^{434} \text{ kg} \quad . \end{aligned}$$

Die Menge des benötigten Raketentreibstoffes überschreitet damit die Masse des Universums.

An den Beispielen erkennt man, dass die Endgeschwindigkeit einer Rakete wesentlich durch die Austrittsgeschwindigkeit der Antriebsgase v_{rel} bestimmt ist. Raketen für interplanetare Raumflüge werden sicher nicht mit chemischen Raketenmotoren ($v_{rel} = 3 \frac{km}{s}$) ausgerüstet werden, sondern mit Ionentriebwerken. Eine Spannung von 25000 V beschleunigt ein Proton auf etwa $2 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$. Die technische Herausforderung besteht in der Bereitstellung der benötigten Ionendichten.

Kapitel 5

Bewegung in 3 Dimensionen - das Keplerproblem

Bisher haben wir eindimensionale Bewegungsprobleme betrachtet und sie entweder über Newton's Bewegungsgleichung gelöst, wenn wir an der Trajektorie des Massenpunktes interessiert waren, oder über Integrale der Bewegung (Impulserhaltung für isolierte Systeme und Energieerhaltung für konservative Systeme), wenn wir eine bestimmte Bewegungsphase des Systems bestimmen wollten. In diesem Kapitel betrachten wir Bewegungen in 3 Dimensionen am Beispiel gravitativer Systeme. Wir werden den Begriff der Arbeit (Energie) als skalare Erhaltungsgröße erweitern und eine neue vektorielle Erhaltungsgröße (Drehimpuls) kennen lernen.

5.1 Arbeit und Energie in 3 Dimensionen

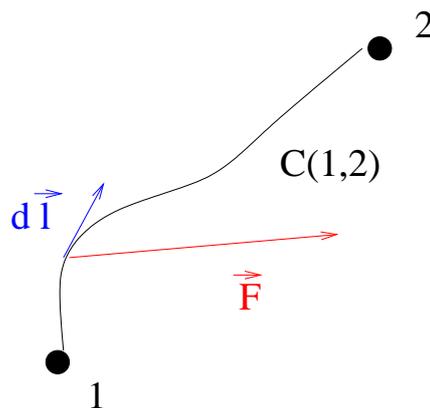


Abb. 5.1: Zum Begriff der Arbeit

- Eindimensionale Bewegung
Die infinitesimale Arbeit dW , die von einer Kraft F entlang der Trajektorie dx eines

Massenpunktes aufgebracht wird, ist

$$dW = F dx$$

- Dreidimensionale Bewegung

Die infinitesimale Arbeit, die entlang einer 3 dim. Trajektorie aufgebracht wird, ergibt sich aus der Kraftkomponente entlang der Trajektorie (Projektion von \vec{F} auf Trajektorienelemente $d\vec{l}$)

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Die integrale Arbeit entlang einer Trajektorie C (Contour) zwischen den Punkten 1 und 2 ist dann

$$W = \int_{C(1,2)} dW = \int_{C(1,2)} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Mathematisch entspricht die Arbeit einem Kurvenintegral (2. Art) über das Vektorfeld \vec{F} (Summation aller infinitesimalen Skalarprodukte $\vec{F} \cdot d\vec{l}$ entlang einer Trajektorie). Im Gegensatz zu eindimensionalen Bewegungsformen stellt sich sofort die Frage, ob die Arbeit von der Form der Trajektorie (C_1, C_2) abhängt? In diesem Zusammenhang haben wir den

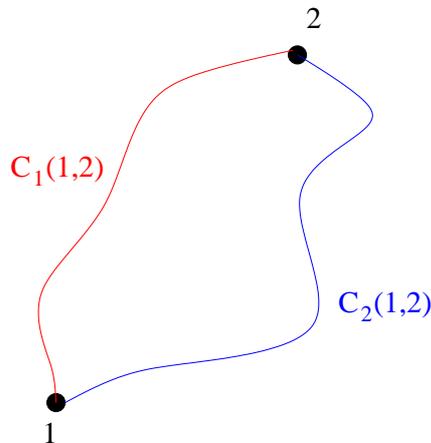


Abb. 5.2: Arbeitsintegral entlang verschiedener Wege C_1 und C_2

Begriff "konservative Kraft" eingeführt: eine eindimensionale Kraft heißt konservativ, wenn sie durch Ortsableitung aus einer Potentialfunktion herleitbar ist:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \leftrightarrow F(x) \text{ ist konservativ}$$

Für solche Kräfte ist das Arbeitsintegral

$$W = \int_1^2 F dx = - \int_1^2 \frac{dU(x)}{dx} dx = - \int_1^2 dU = -(U(2) - U(1))$$

gleich der Potentialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt der Bewegung. Übertragen auf 3 dim. Bewegungsformen würde man eine Kraft \vec{F} dann konservativ nennen, wenn gilt: es existiert ein Potential $U(\vec{r})$, so dass

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) .$$

Dann gilt für das Arbeitsintegral

$$\begin{aligned} W &= \int_{C(1,2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{C(1,2)} \nabla U d\vec{l} = - \int_{C(1,2)} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right\} \\ &= - \int_1^2 dU = U(1) - U(2) , \end{aligned}$$

dass es sich als Integral über das totale Differential dU der Potentialfunktion schreiben lässt und somit W nur von Anfangs- und Endpunkt der Bewegung abhängt, aber nicht von der Form des Weges dazwischen. Somit haben wir folgende äquivalente Aussagen:

Eine Kraft \vec{F} heißt konservativ, wenn \vec{F} ein Gradientenfeld ist, also

$$\vec{F} = -\nabla U \Leftrightarrow \text{rot}\vec{F} = -\nabla \times \nabla U = 0$$

$$\int_{C_1(1,2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{C_2(1,2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = U(1) - U(2)$$

und somit das Arbeitsintegral wegunabhängig ist.

Speziell zeigt sich die Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals an einer geschlossenen Trajektorie

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 .$$

Benutzt man Newton's Bewegungsgleichung in der Form $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$, so erhält man wie im 1 dim. Fall

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{C(1,2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 m \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot d\vec{v} \\ &= m \int_1^2 \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \left\{ \int_1^2 v_x dv_x + \int_1^2 v_y dv_y + \int_1^2 v_z dv_z \right\} \\ &= \frac{1}{2} m \{ v_x^2(2) - v_x^2(1) + v_y^2(2) - v_y^2(1) + v_z^2(2) - v_z^2(1) \} \\ &= \frac{1}{2} m v^2(2) - \frac{1}{2} m v^2(1) , \end{aligned}$$

dass mit einer erbrachten Arbeit entlang einer Trajektorie immer eine Änderung der kinetischen Energie verbunden ist. Für konservative Systeme haben wir somit die Aussage

$$\int \vec{F} d\vec{l} = U(1) - U(2) = \frac{1}{2} m v^2(2) - \frac{1}{2} m v^2(1)$$

Da sich Anfangs- und Endpunkt der Trajektorie $C(1, 2)$ in der Zeit unterscheiden, gilt

$$\leftrightarrow E(t_1) = \frac{1}{2}mv^2(t_1) + U(t_1) = \frac{1}{2}mv^2(t_2) + U(t_2) = E(t_2)$$

die totale mechanische Energie ist eine Erhaltungsgröße.

5.2 Drehmoment und Drehimpuls

Ein Massenpunkt, der sich in 3 Dimensionen bewegt, besitzt bezogen auf ein bestimmtes Koordinatensystem einen Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Der Betrag von \vec{L} entspricht dem von \vec{r} und \vec{p} aufgespannten Flächeninhalt, die Richtung

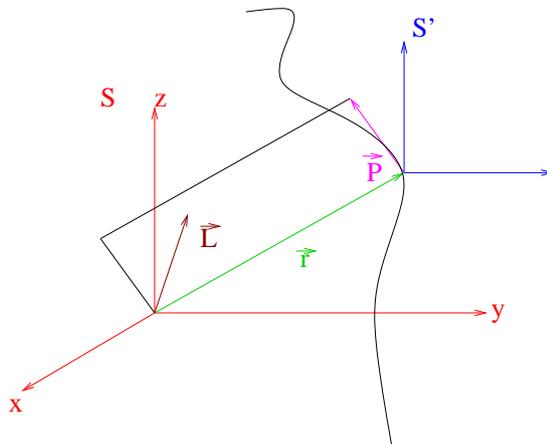


Abb. 5.3: Zur Definition des Drehimpulses $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $|\vec{L}| = r \cdot p \cdot \sin(\vec{r}, \vec{p})$

von \vec{L} ist senkrecht zu \vec{r} und \vec{p} in der Form, dass $\vec{r}, \vec{p}, \vec{L}$ ein Rechtssystem bilden. Der Drehimpuls ist abhängig vom gewählten Koordinatensystem: in S' z. B. ist $\vec{L} = 0$ (weil $\vec{r} = 0$). Über Newton's BWGL ist einem Drehimpuls immer ein Drehmoment zugeordnet

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt} \vec{L} - \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=0} = \dot{\vec{L}}.$$

Dies ist der Drehimpulssatz: ein Drehmoment bewirkt eine zeitliche Änderung des Drehimpulses.

Beispiele

B5.1 Wie öffnen Sie eine Tür: mit Kraft oder Drehmoment?

B5.2 Wie üben Sie eine starke Kraft auf einen Körper aus?

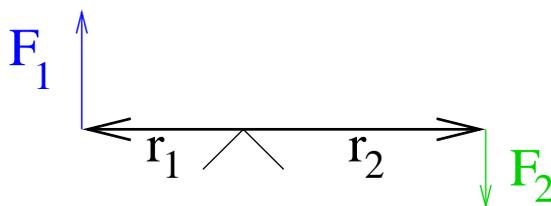


Abb. 5.4: Hebel

Hebel: das Drehmoment auf beiden Seiten des gelagerten Balkens ist betragsmäßig gleich (sonst würde der Balken brechen), d.h.

$$F_1 r_1 = F_2 r_2$$

$$F_1 = \frac{r_2}{r_1} \cdot F_2 .$$

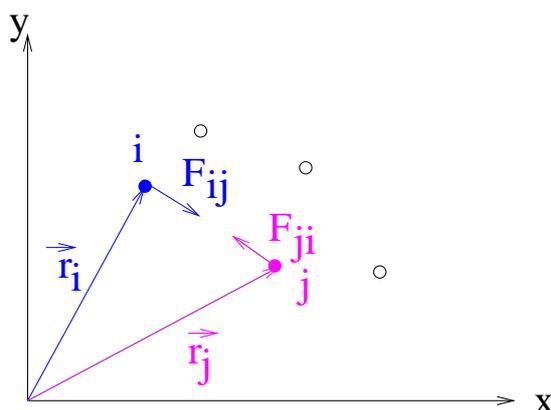


Abb. 5.5: Drehimpulserhaltung eines abgeschlossenen Systems von Massenpunkten: innere Drehmomente heben sich weg.

Insbesondere ist der Drehimpuls ein Integral der Bewegung für Systeme von Massenpunkten, auf die kein äußeres Drehmoment wirkt: da wegen Newton's 3. Gesetz $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, gilt für das interne Drehmoment zwischen 2 Massenpunkten (i,j beliebig)

$$\begin{aligned} \vec{M}_{ij} &= \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \\ &= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \\ &= 0 , \end{aligned}$$

da $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ parallel zu \vec{F}_{ij} ist.
Somit gilt analog zum Impulssatz

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{M}_i^{ext}$$

die zeitliche Änderung des totalen Drehimpulses eines Systems von Massenpunkten ist gleich der Summe der äußeren Drehmomente.

5.3 Zentralkräfte

Ein Zentralkraftfeld ist gekennzeichnet durch eine Kraft, die immer parallel zu einer gedachten Linie zwischen Kraftzentrum und Massenpunkt weist. Die Zentralkraft heißt at-

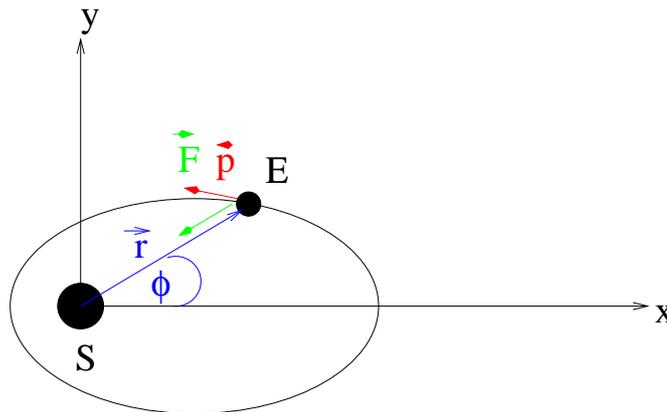


Abb. 5.6: Zentralkraft

traktiv, wenn sie zum Kraftzentrum zeigt und repulsiv, wenn sie von ihm weg weist. Ein wesentliches Merkmal einer Zentralkraft ist, dass sie frei von Drehmomenten ist, da

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin(\vec{r}, \vec{F}) = r \cdot F \cdot \sin \begin{cases} 0 & : \text{repulsiv} \\ \pi & : \text{attraktiv} \end{cases} = 0.$$

Da für Zentralkräfte kein Drehmoment existiert, folgt für den Drehimpulssatz sofort, dass der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist

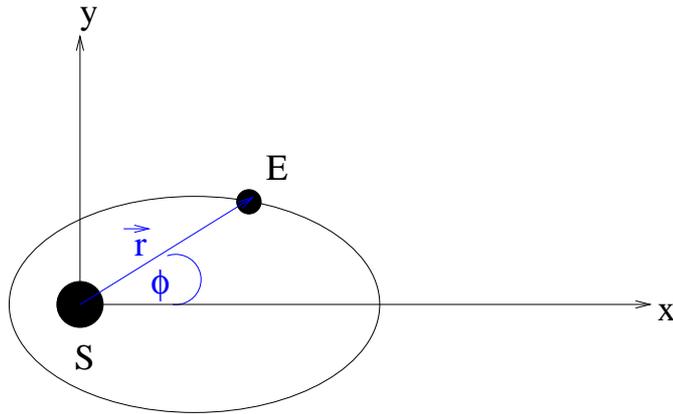
$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L}(t) = \vec{L}(0).$$

Die Energie ist ebenfalls eine Erhaltungsgröße, da Zentralkräfte konservativ, also durch Potentiale darstellbar sind.

5.4 Planetenbewegung als Einkörperproblem

Für die vereinfachte Planetenbewegung um die Sonne macht man folgende Annahmen:

- (i) Der Schwerpunkt des Systems Planet-Sonne befindet sich im Mittelpunkt der Sonne.
- (ii) Andere Himmelskörper haben keine Auswirkung auf die Bahn des betrachteten Planeten.

Abb. 5.7: Ekliptik (Erdbahn \equiv Scheinbare Sonnenbahn)

Da der Drehimpuls erhalten ist, müssen \vec{r} und \vec{p} immer in derselben Ebene liegen, d.h. die Bewegung eines ungestörten Himmelskörpers um die Sonne definiert eine Ebene. Aus diesem Grund wählen wir zur Beschreibung der Planetenbahn ebene Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi & \dot{x} &= \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\ y &= r \sin \phi & \dot{y} &= \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi . \end{aligned}$$

Da die Gravitationskraft konservativ ist, wird die mechanische Gesamtenergie ebenfalls zur Erhaltungsgröße

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \gamma \frac{mM}{r} \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \vec{L} &= (\vec{r} \times \vec{p}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z(xp_y - yp_x) \\ &= m\vec{e}_z \left\{ r \cos \phi (\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) - r \sin \phi (\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) \right\} \\ &= mr^2 \dot{\phi} \vec{e}_z \end{aligned}$$

erhält man schließlich für gegebenen Drehimpuls

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left\{ \frac{L^2}{2mr^2} - \gamma \frac{mM}{r} \right\} \equiv T + U_{eff}(r) ,$$

einen Ausdruck für die Gesamtenergie, der nur vom momentanen Planetenabstand $r(t)$ abhängt. Die effektive potentielle Energie setzt sich zusammen aus der wahren potentiellen

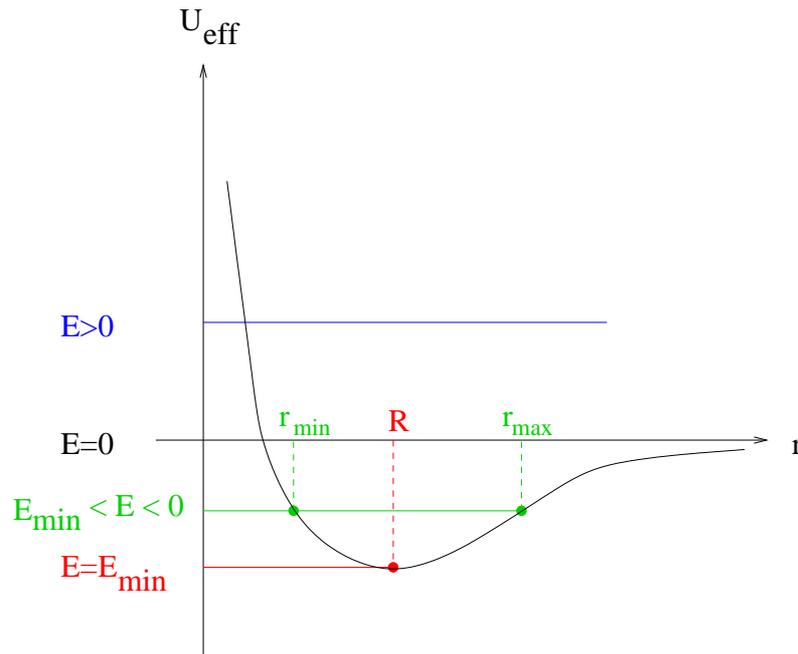


Abb. 5.8: Effektives Potential eines Planeten im Gravitationsfeld der Sonne

Energie und dem Zentrifugalpotential, dem azimuthalen Anteil der kinetischen Energie. Für einen gegebenen Drehimpuls L lassen sich die folgenden 4 Fälle unterscheiden (siehe Abb. 5.8):

(i) $E = E_{min}$:

In diesem Fall hat der Planet einen konstanten Abstand von der Sonne

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow r = \frac{L^2}{\gamma m^2 M} \equiv R,$$

bewegt sich also auf einer Kreisbahn. Dann ist $\vec{r} \perp \vec{p}$ und somit

$$\begin{aligned} L &= m \cdot R \cdot v \\ \Leftrightarrow R &= \frac{L^2}{\gamma m^2 M} \Rightarrow R = \gamma \frac{M}{v^2}. \end{aligned}$$

Die Umlaufzeit des Planeten beträgt

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} \cdot R^{3/2}$$

(wobei $v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}$ benutzt wurde).

$$\Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2} = const$$

Somit haben wir für diesen Fall das 3. Keplersche Gesetz bestätigt.

(ii) $E_{min} < E < 0$:

Für den allgemeinen Fall einer gebundenen Umlaufbahn erhalten wir zwei Umkehr-

$$\text{punkte } r_{ext} = \begin{cases} r_{min} \\ r_{max} \end{cases} .$$

$$\begin{aligned} E(\dot{r} = 0) &= U_{eff}(r_{ext}) = \frac{L^2}{2mr_{ext}^2} - \gamma \frac{Mm}{r_{ext}} \\ \Rightarrow r_{ext} &= -\gamma \frac{mM}{2E} \left\{ 1 \pm \left[1 + \frac{2EL^2}{\gamma^2 m^3 M^2} \right]^{1/2} \right\} \\ &\stackrel{E < 0}{=} \gamma \frac{mM}{2|E|} \left\{ 1 \pm \left[1 - \underbrace{\frac{2|E|L^2}{\gamma^2 m^3 M^2}} \right]^{1/2} \right\} . \\ &< 1 \\ &\equiv a(1 \pm \epsilon) . \end{aligned}$$

Dies führt zwangsläufig auf eine Ellipsenbahn mit der Halbachse a und der Exzentrizität ϵ mit den Umkehrpunkten r_{min} und r_{max} .

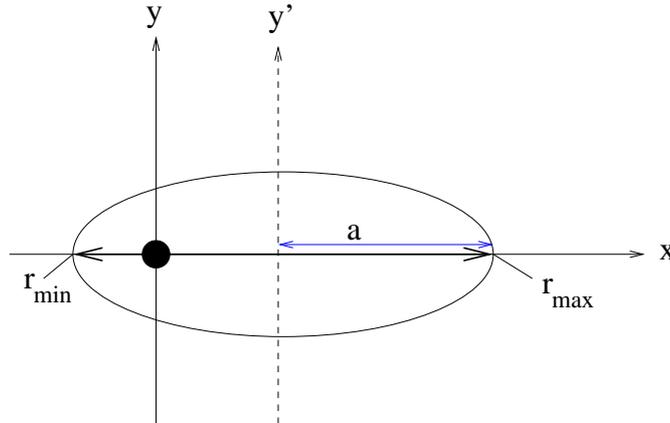


Abb. 5.9: Großer Halbachse a und die Umkehrpunkten r_{min} , r_{max} .

Damit erhalten wir das 1. Keplersche Gesetz.

(iii) $E = 0$:

In diesem Fall ist der Körper gerade ungebunden und bewegt sich von $r_{min}(\dot{r} = 0)$ bis $r_{max} \rightarrow \infty$, so dass er bei r_{max} gerade keine kinetische Energie besitzt.

$$\begin{aligned} E(\dot{r} = 0) &= 0 = U_{eff}(r_{ext}) \\ \frac{L^2}{2mr_{ext}^2} - \gamma \frac{mM}{r_{ext}} &= 0 \Leftrightarrow r_{ext} = r_{min} = \frac{L^2}{2\gamma M m^2} , r_{max} \rightarrow \infty . \end{aligned}$$

Die Exzentrizität ist $\epsilon(E = 0) = 1$, was einer Parabel (siehe Kegelschnitte) entspricht. Solche Körper gehören zum Sonnensystem, sind aber nicht gebunden.

(iv) $E > 0$:

Diese Situation ist typisch für Körper, die nicht zu unserem Sonnensystem gehören, also mit kinetischer Energie $E = \frac{1}{2}mv_i^2$ in das Gravitationsfeld der Sonne eintreten. Sie erreichen einen nächsten Abstand von der Sonne bei

$$E(\dot{r} = 0) = 0 = U_{eff}(r_{min}) = \frac{L^2}{2mr_{min}^2} - \gamma \frac{mM}{r_{min}}$$

$$r_{min} = \gamma \frac{mM}{2E} \left\{ \left[1 + \frac{2EL^2}{\gamma^2 m^3 M^2} \right]^{1/2} - 1 \right\}$$

und entfernen sich für immer aus dem Sonnensystem. Die Bahn ist eine Hyperbel ($\epsilon > 1$).

Dieser Fall entspricht einer dezentralen, elastischen Streuung mit Stoßparameter b

$$L = b \cdot m \cdot v_i, \quad v_i = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$\hookrightarrow b = \frac{L}{m\sqrt{\frac{2E}{m}}} = \frac{L}{\sqrt{2mE}}.$$

Will man die Trajektorie direkt berechnen, so geht man vom Energiesatz aus und erhält

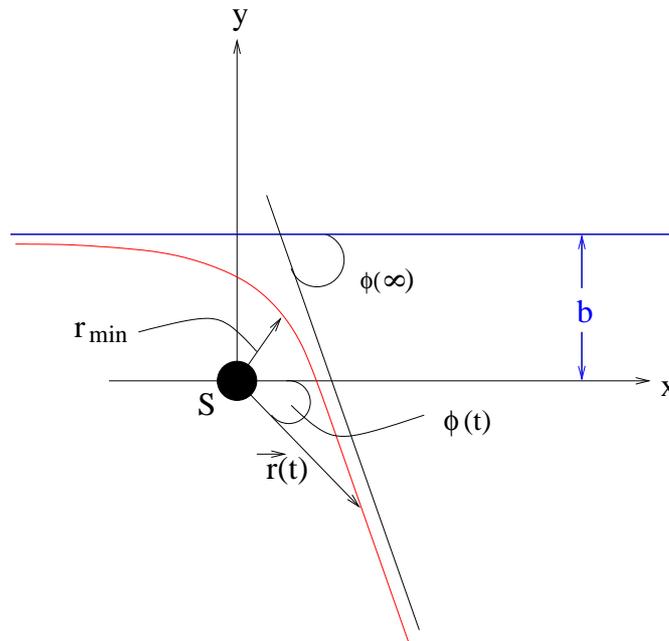


Abb. 5.10: Parameter eines dezentralen Streuproblems

für die radiale Koordinate die DGL

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \left[\frac{2}{m} \left(E + \gamma \frac{mM}{r} \right) - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right]^{1/2}$$

bzw. für die Winkelkoordinate aus $L = mr^2\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{mr^2}.$$

Da $\dot{\phi}$ nicht von ϕ abhängt, kann man die Winkeldgl. direkt integrieren, und zwar in folgender Form:

$$d\phi = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} dr$$

$$\Leftrightarrow \phi(r) = \int \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\left[2m \left(E + \gamma \frac{mM}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)\right]^{1/2}}$$

$\phi(r \rightarrow \infty)$ ist dann der Streuwinkel, unter dem der Körper den Einflussbereich des Potentials verlässt.

Zu Beginn der Diskussion haben wir gesehen, dass wegen der Drehimpulserhaltung die Planetenbewegung in der Ebene verlaufen muss. Dazu berechnen wir nun das gerichtete Flächenelement $d\vec{A}$, das der Ortsvektor in der Zeit dt überstreicht

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{\vec{r} \times m\vec{v}}{2m} = \frac{\vec{L}}{2m}.$$

Da aber \vec{L} eine Erhaltungsgröße ist, muss auch $\frac{d\vec{A}}{dt}$ zeitlich konstant sein. Somit ist auch das 2. Keplersche Gesetz bestätigt.

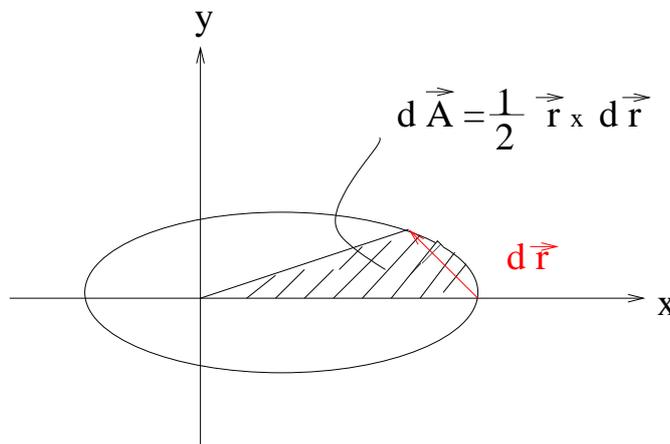


Abb. 5.11: Zum 2. Keplerschen Gesetz

In Wirklichkeit ist leider alles viel komplizierter. Auf jeden Planeten wirkt nicht nur die Gravitationskraft der Sonne, sondern auch die Kräfte aller anderen Planeten. Zwar ist, wie wir eingangs gesehen haben der Summendrehimpuls eine Erhaltungsgröße, aber auf jeden einzelnen Planeten wirken die Zentralkräfte der anderen Planeten in verschiedenen Richtungen. Somit kommt es zu einem Austausch von Drehimpuls über die interplanetare Wechselwirkung. Damit sind auch die Planetenbahnen komplizierter.

Kapitel 6

Beschleunigte Bezugssysteme

In Kapitel 1.5 haben wir gesehen, dass Inertialsysteme gleichwertig zur Beschreibung physikalischer Vorgänge sind (Relativitätsprinzip). Hingegen treten in beschleunigten Bezugssystemen Scheinkräfte auf, die der Beschleunigung entgegen wirken.

6.1 Beschleunigte Bezugssysteme

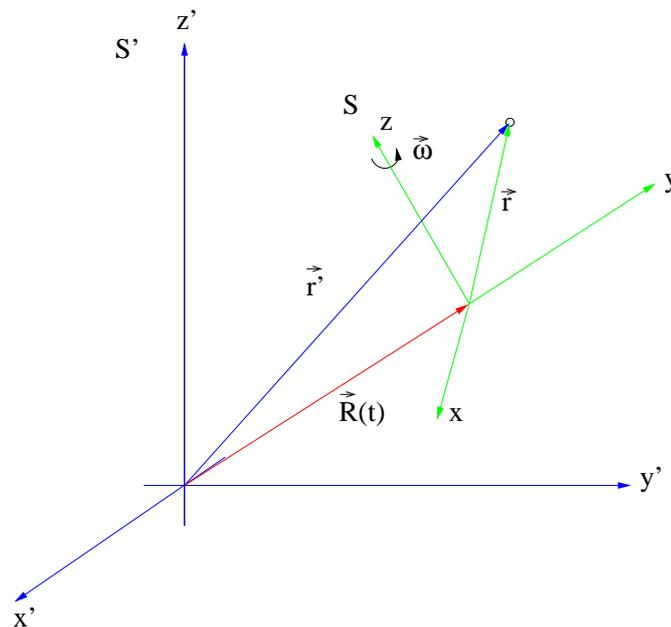


Abb. 6.1: S' : Inertialsystem, S : beschleunigtes Bezugssystem

S bewegt sich relativ zu einem Inertialsystem S' beschleunigt. Für jeden Punkt im Raum gilt

$$\vec{r}' = \vec{R} + \vec{r} .$$

Um die Geschwindigkeitstransformation zu bestimmen, nehmen wir an, dass $R(t)$ eine beschleunigte Translationsbewegung beschreibt. Das System S rotiere darüber hinaus (ohne

Beschränkung der Allgemeinheit) um die z -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Wir wollen für den Augenblick die Translationsgeschwindigkeit vernachlässigen und annehmen, dass S und S' einen gemeinsamen Koordinatenursprung besitzen, also $R(t) = 0$.

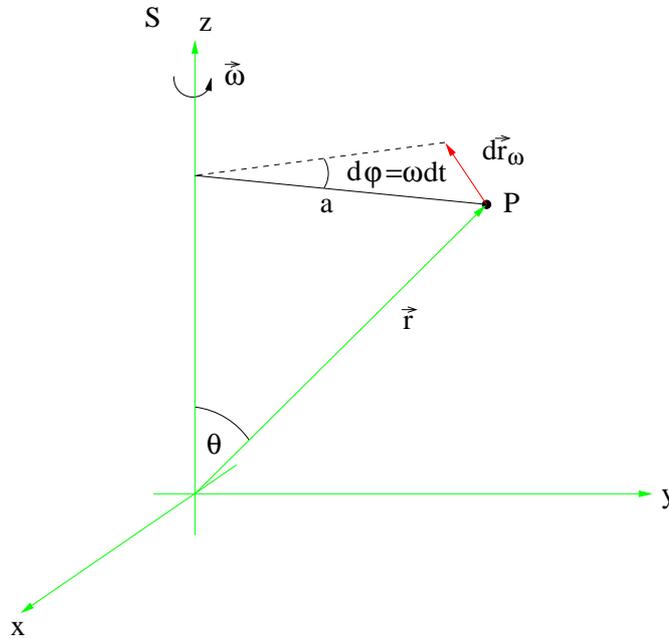


Abb. 6.2: Bewegung eines bezüglich eines rotierenden Bezugssystems festen Raumpunktes

Sei P ein fester Punkt bezüglich des rotierenden Systems. Bezüglich des Inertialsystems ändern sich die Komponenten des Punktes in der Zeit dt um den Verschiebungsvektor $d\vec{r}_\omega$, also

$$\begin{aligned} |d\vec{r}_\omega| &= a \cdot d\varphi = (r \sin \theta)(\omega dt) \\ &= \omega r \sin \theta dt \\ &= \omega r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) \cdot dt \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{d\vec{r}_\omega}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Bewegt sich der Massenpunkt zusätzlich im Raum mit der Geschwindigkeit $\frac{d\vec{r}_v}{dt}$, so ergibt sich für die Verschiebung $d\vec{r}$ insgesamt

$$d\vec{r} = d\vec{r}_\omega + d\vec{r}_v = (\vec{\omega} \times \vec{r})dt + d\vec{r}_v.$$

und

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{r}_v}{dt}.$$

An dieser Stelle müssen wir unterscheiden zwischen der internen Bewegung des Massenpunktes relativ zum rotierenden System $\frac{d\vec{r}_v}{dt} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_R$ und der Gesamtbewegung, gesehen

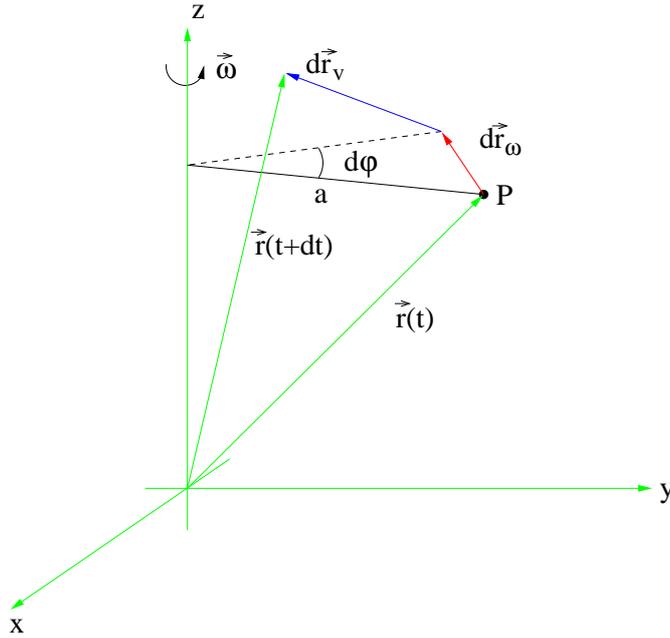


Abb. 6.3: Bewegter Massenpunkt im rotierenden Bezugssystem

aus dem Inertialsystem $\frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_I$, von der aus man die Rotation des Systems S sieht

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_I &= \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_R + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{v}\Big|_I &= \vec{v}\Big|_R + \vec{\omega} \times \vec{r}.\end{aligned}$$

Diese Transformation zwischen Zeitableitungen von Vektoren des Inertial- und rotierenden Systems gilt allgemein, d.h. auch für die Geschwindigkeit der Systeme

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}_I}{dt}\Big|_I &= \frac{d\vec{v}_I}{dt}\Big|_R + \vec{\omega} \times \vec{v}_I \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_R (\vec{v}\Big|_R + \vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times (\vec{v}\Big|_R + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{d\vec{v}}{dt}\Big|_R + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\Big|_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).\end{aligned}$$

(Bemerkung: $\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ist für beide Systeme gleich. Beweis: $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_I = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_R + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_R$ q.e.d.). D.h. wir erhalten für die Beschleunigung eines Massenpunktes im rotierenden System ($\vec{a}\Big|_R \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}\Big|_R$) bezogen auf die Beschleunigung im Inertialsystem ($\vec{a}\Big|_I \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}\Big|_I$)

$$\vec{a}\Big|_R = \vec{a}\Big|_I - 2\vec{\omega} \times \vec{v}\Big|_R - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}.$$

Kommt zusätzlich noch eine beschleunigte Translationsbewegung des Koordinatenursprungs von S hinzu, erhält man

$$\vec{a}\Big|_R = \vec{a}\Big|_I - \ddot{\vec{R}}\Big|_I - 2\vec{\omega} \times \vec{v}\Big|_R - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}.$$

Der 'wahren Beschleunigung' $\vec{a}|_I$ gemessen im Inertialsystem wirken offenbar vier 'Scheinkräfte' entgegen: (i) $\vec{F}_R \equiv -m\ddot{\vec{R}}|_I$ Trägheitskraft eines linear beschleunigten Bezugssystems (typisch in Aufzügen) (ii) $\vec{F}_C \equiv -2m\vec{\omega} \times \vec{v}|_R$ Corioliskraft, die auf einen im rotierenden Bezugssystem bewegten Massenpunkt wirkt, (iii) $\vec{F}_Z \equiv -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ die Zentrifugalkraft und (iv) $\vec{F}_\omega \equiv -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ eine Scheinkraft, die durch eine ungleichmäßige Rotationsgeschwindigkeit hervorgerufen wird. Wir wollen uns im Folgenden auf die zwei Scheinkräfte beschränken, die wir in einem erdgebundenen Bezugssystem spüren: die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft.

6.2 Scheinkräfte auf der Erdoberfläche

6.2.1 Die Zentrifugalkraft

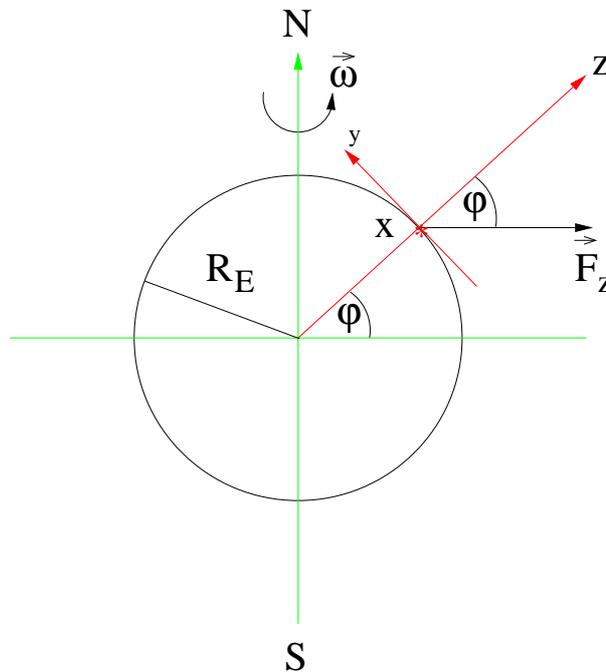


Abb. 6.4: Erdgebundenes Horizontalsystem (die x-Achse steht senkrecht auf der Bildebene und zeigt in sie hinein).

Betrachte ein erdgebundenes Horizontalsystem unter der geographischen Breite φ mit den Achsen

$$\begin{aligned} \text{x-Achse} &: \overrightarrow{WO} \\ \text{y-Achse} &: \overrightarrow{SN} \\ \text{z-Achse} &: \text{Zenit} \end{aligned}$$

Bezüglich dieses Koordinatensystems gilt für die Zentrifugalbeschleunigung (R_E : Radius

der Erde)

$$\begin{aligned}\vec{a}_Z &= -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\vec{\omega} \times (\omega R_E \sin(90^\circ - \varphi) \vec{e}_x) \\ &= \omega^2 R_E \sin(90^\circ - \varphi) \sin(\vec{\omega}, \vec{e}_x) (-\sin \varphi \vec{e}_y + \cos \varphi \vec{e}_z)\end{aligned}$$

da $\vec{\omega} \perp \vec{e}_x$ folgt unmittelbar

$$\vec{a}_Z = \omega^2 R_E \cos \varphi (-\sin \varphi \vec{e}_y + \cos \varphi \vec{e}_z).$$

Die Zentrifugalkraft ist offenbar abhängig von der geographischen Breite. Sie wirkt senkrecht zur Drehachse (Polachse) nach außen. An den Polen verschwindet $\vec{F}_Z(\varphi = \pm 90^\circ)$ und ist maximal am Äquator. Berechnet man die Stärke der Zentrifugalkraft im Vergleich zur erdnahen Gravitation ($\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = 86400 \text{ s}$, $R_E = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$) so erhält man am Äquator ($\varphi = 0^\circ$)

$$\frac{\omega^2 R_E}{g} = \frac{3,4 \cdot 10^{-2}}{9,8} = 3,47 \cdot 10^{-3}.$$

Obwohl dieser Faktor so klein ist, hat sich die Erde wegen ihres flüssigen Kerns elliptisch verformt, d.h. die Polarregionen haben sich abgeflacht. Wegen dieser oblat elliptischen Ver-

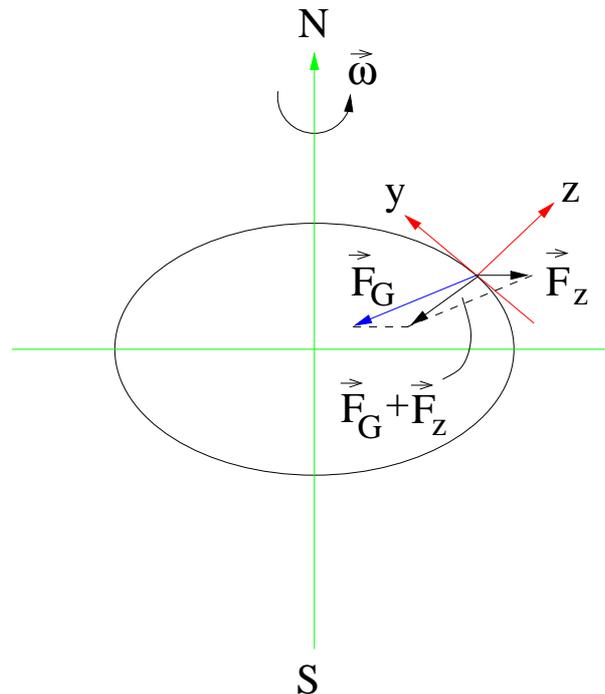


Abb. 6.5: Ellipsoide Verformung der rotierenden Erde

formung zeigt die effektive Kraft $-m(\vec{g} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$ auf einen ruhenden Massenpunkt im rotierenden System an jedem Ort der Erde immer senkrecht zur lokalen Horizontalen in Richtung des Erdinneren, so dass bis auf eine kleine betragsmäßige Korrektur der erdnahen Gravitationskraft die Zentrifugalkraft keine Wirkung besitzt.

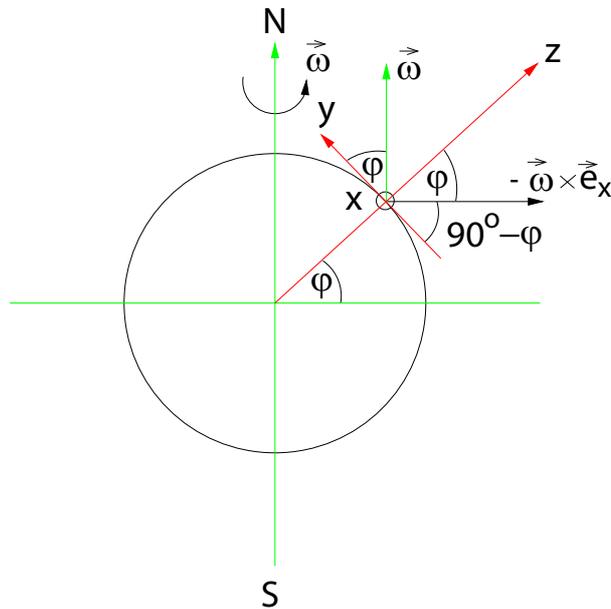


Abb. 6.6: Zur Wirkungsweise der Corioliskraft

6.2.2 Die Corioliskraft

Im Gegensatz zur Zentrifugalkraft ist die Corioliskraft in vielen Phänomenen auf der Erdoberfläche zu beobachten. Ein Massenpunkt, der sich auf einem erdgebundenen Horizontalsystem unter der geographischen Breite φ nördlich des Äquators bewegt, erfährt eine Ablenkungskraft (Corioliskraft) proportional zu seiner Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}\vec{F}_C &= -2m\vec{\omega} \times \vec{v}|_R = -2m\vec{\omega} \times (v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z) \\ &= 2m\omega(v_x \sin(90^\circ)(-\sin \varphi\vec{e}_y + \cos \varphi\vec{e}_z) + v_y \sin \varphi\vec{e}_x - v_z \cos \varphi\vec{e}_x) \\ &= (Av_y - Bv_z, -Av_x, Bv_x)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}A &= 2m\omega \sin \varphi \\ B &= 2m\omega \cos \varphi .\end{aligned}$$

Das erdgebundene Koordinatensystem ist so gewählt, dass \vec{e}_x nach Osten, \vec{e}_y nach Norden und \vec{e}_z in den Zenit gerichtet sind. Damit ergibt sich für die Richtung der Ablenkung auf der nördlichen Hemisphäre die Zusammenstellung in Tabelle 6.1. Dabei bedeuten die Richtungen Zenit und Nadir Ablenkungen radial nach außen bzw. innen. Diese Komponenten der Corioliskraft werden durch die Gravitation überlagert und haben keine sichtbaren Auswirkungen auf die Bewegung. Die Komponenten innerhalb der Horizontalebene zeigen offenbar immer nach rechts bezogen auf die Bewegungsrichtung. Die Stärke der Rechtsablenkung durch die Corioliskraft ist abhängig von der geographischen Breite ($\sim \sin \varphi$): am Äquator gibt es keine Ablenkung, am Nordpol ist die Ablenkung am größten. Betrachtet man die Wirkung der Corioliskraft auf der südlichen Halbkugel, so zeigt sich ein ähn-

Bewegungsrichtung	\vec{v}	\vec{F}_C	Ablenkungsrichtung
N	$\begin{pmatrix} 0 \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Av_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	O
O	$\begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -Av_x \\ Bv_x \end{pmatrix}$	S, Zenit
S	$\begin{pmatrix} 0 \\ -v_y \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -Av_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	W
W	$\begin{pmatrix} -v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ Av_x \\ -Bv_x \end{pmatrix}$	N, Nadir

Tab. 6.1: Geometrie der Corioliskraft nördlich des Äquators

licher Effekt, aber mit einer verblüffenden Wendung: da $\varphi < 0^\circ$ für Orte südlich des Äquators wechselt die Horizontalablenkung ihr Vorzeichen, da $\sin \varphi = \sin(-|\varphi|) = -\sin |\varphi|$ für $\varphi < 0^\circ$. D.h. auf der südlichen Hemisphäre werden bewegte Massenpunkte immer nach

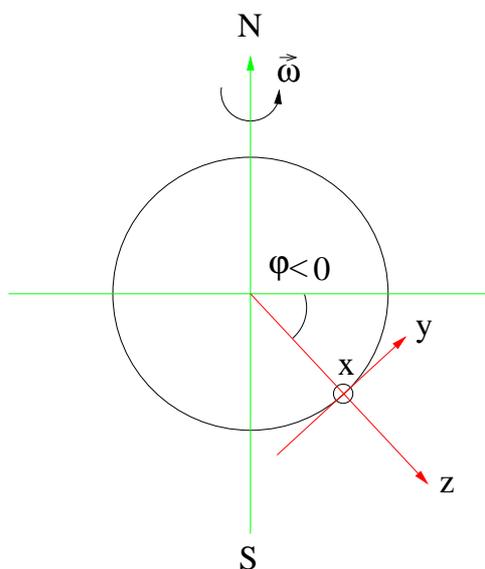


Abb. 6.7: Zur Corioliskraft auf der Südhalbkugel

links abgelenkt.

Beispiele:

B6.1 Wetterkarte auf der nördlichen Hemisphäre

Warum werden Tiefdruckgebiete von druckausgleichenden Luftströmungen immer gegen den Uhrzeigersinn umströmt? Es ist die Corioliskraft, die dafür sorgt, dass die in das Tief-

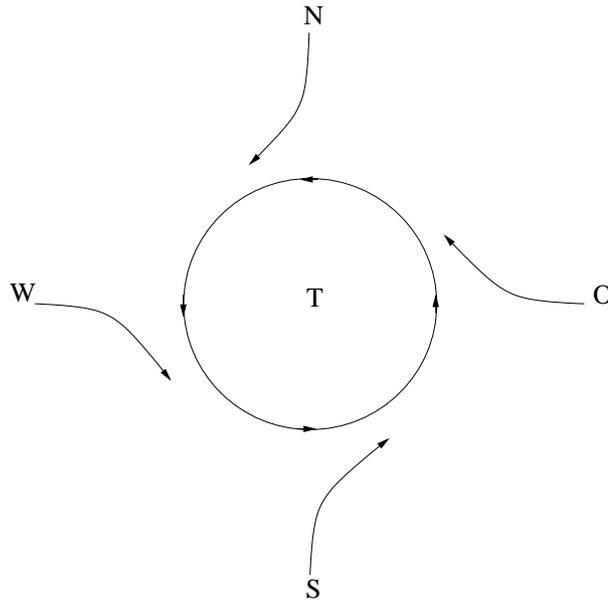


Abb. 6.8: Coriolisablenkung in Tiefdruckgebieten

druckgebiet einströmenden Luftmassen, die aus allen Richtungen kommen, nach rechts abgelenkt werden und einen Wirbel erzeugen, der gegen den Uhrzeigersinn gerichtet ist. Auf der Südhalbkugel haben Tiefdruckwirbel den umgekehrten Drehsinn.

B6.2 Waagrechter Wurf auf der Erde

Für die Ballistiker der Geschichte war die Corioliskraft durchaus ein ernstzunehmendes Problem. Sie mussten die Zielvorrichtungen ihrer Kanonen so einrichten, dass die Abweichung kompensiert würde. Während einer Seeschlacht im Verlauf des 1. Weltkrieges in der Nähe der Falkland Inseln (vor der Küste Argentiniens) staunten britische Kanoniere nicht schlecht, dass ihre in England so sorgfältig eingestellten Zielvorrichtungen dazu führten, dass sie ihre Ziele regelmäßig um ca. 100 m nach links verfehlten. Warum?

B6.3 Foucault-Pendel

Die idealisierte Form eines ebenen mathematischen Pendels existiert nicht auf der Erde, allenfalls am Äquator. Durch die Corioliskraft wird die schwingende Masse auf der nördlichen Hemisphäre nach rechts abgelenkt und bildet im Lauf der Zeit die typischen Rosetten des Foucault-Pendels.

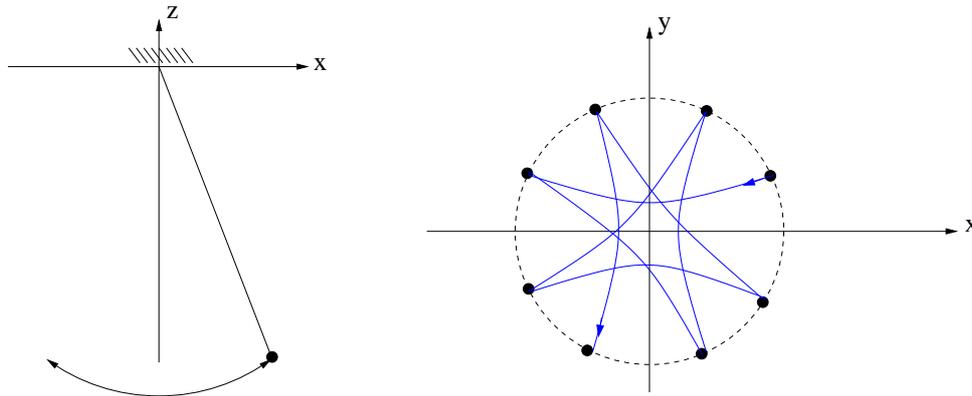


Abb. 6.9: Coriolisablenkung im Foucault-Pendel

6.3 Gezeitenkräfte

Wirkt ein inhomogenes Gravitationsfeld auf einen ausgedehnten Körper, so können die Differenzkräfte innerhalb des Körpers so stark werden, dass er sich verformt. (bzw. in Bruchstücke zerfällt). Diese Differenzkraft nennt man Gezeitenkraft. Das Phänomen der Verformung in einem inhomogenen Kraftfeld werden wir in der Elektrostatik und in der Atomphysik unter dem Begriff Polarisierung wiederfinden. Um die Gezeitenkraft, welche die Sonne auf die Erde ausübt, abzuschätzen, wollen wir annehmen, dass sich die Erde auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegt. Die Keplerbahn ist dann stabil, wenn der Mit-

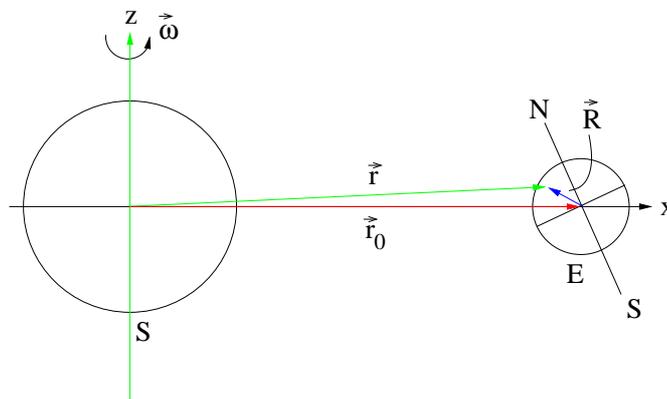


Abb. 6.10: Rotierendes Schwerpunktsystem von Erde und Sonne. $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ist die Umlaufzeit der Erde.

telpunkt der Erde im geozentrischen System kräftefrei ist, d.h. im Mittelpunkt der Erde kompensieren sich Gravitation und Zentrifugalkraft. Für ein beliebiges Massenelement Δm im Zentrum der Erde gilt dann im rotierenden System Erde-Sonne

$$\vec{F}(\vec{r}_0)|_R = \vec{F}_G + \vec{F}_Z \rightarrow \gamma \frac{M\Delta m}{r_0^3} \vec{r}_0 = \Delta m \omega^2 r_0 \frac{\vec{r}_0}{r_0}$$

Ein Massenelement an einem beliebigen anderen Punkt \vec{R} der Erde ist dagegen nicht kräftefrei. Da er sich mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt wie der Mittelpunkt, ist die Zentrifugalkraft, in diesem Punkt genauso groß. Dagegen ist die Gravitationskraft der Sonne größer oder kleiner je nachdem, ob sich der Punkt in Sonnennähe oder -ferne

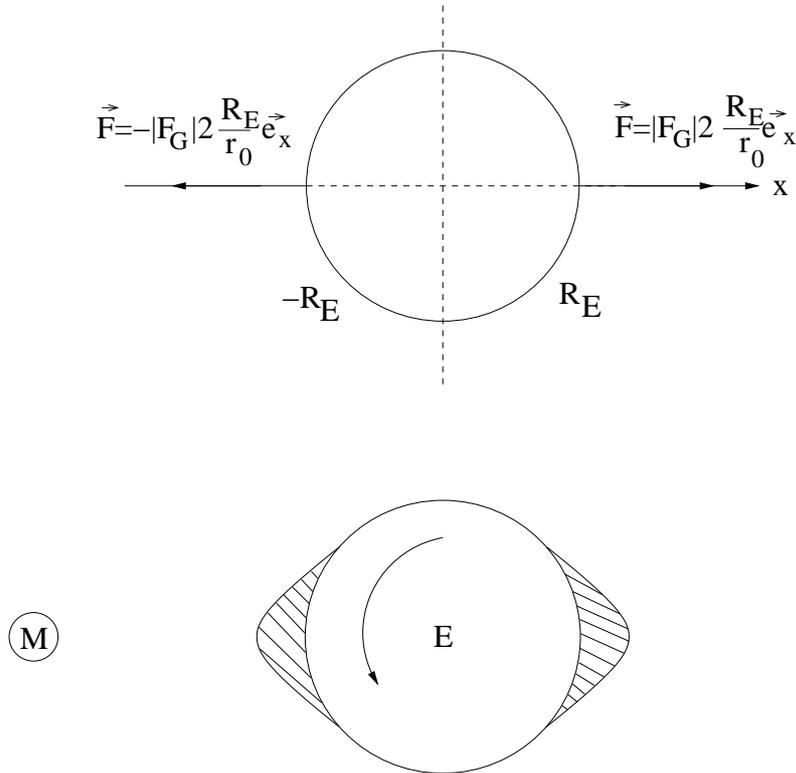


Abb. 6.11: Zur Gezeitenkraft.

befindet. Es gilt somit für die Gezeitenkraft

$$\begin{aligned}
 \vec{F}(\vec{r})|_R &= \vec{F}_G(\vec{r}) + \vec{F}_Z(\vec{r}_0) \\
 &= -\gamma \frac{M \Delta m}{r^3} \vec{r} + \Delta m \omega^2 r_0 \frac{\vec{r}_0}{r_0} \\
 &= \gamma M \Delta m \left(\frac{\vec{r}_0}{r_0^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right).
 \end{aligned}$$

Da der Radius der Erde R_E klein im Vergleich mit dem Abstand Erde-Sonne ist, gilt in guter Näherung $\frac{\vec{r}_0}{r_0} \approx \frac{\vec{r}}{r}$ an jedem Punkt der Erde und somit

$$\vec{F}(\vec{r})|_R = \gamma M \Delta m \frac{\vec{r}_0}{r_0} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) = -\vec{F}_G \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right).$$

Im Rahmen der gleichen Näherung approximiert man $\vec{r} \approx \vec{r}_0 + R\vec{e}_x$ ($R < 0$: Punkt in Sonnennähe, $R > 0$: Punkt in Sonnenferne) und erhält

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r})|_R &= -\vec{F}_G \left(1 - \frac{r_0^2}{(r_0 + R)^2}\right) = -\vec{F}_G \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{r_0}\right)^2}\right) \\ &\approx -\vec{F}_G \left(1 - \left(1 - 2\frac{R}{r_0} \pm \dots\right)\right) \approx -\vec{F}_G \cdot 2\frac{R}{r_0} \\ &= 2\gamma M \Delta m \frac{R \vec{r}_0}{r_0^3}.\end{aligned}$$

Bemerkung:

In einer verallgemeinerten Form findet man die Gezeitenkraft überall in der Physik, wo wir es mit einem polarisierbaren Medium zu tun haben. $F(\vec{r}) = \frac{\alpha}{r^3}$ ist die Kraft, die ein Dipol in einem Zentralkraftfeld spürt und α (Polarisierbarkeit) ist die Fähigkeit eines Mediums sich in einen Dipol zu 'verformen'.

Analog erhält man eine Gezeitenkraft auf Massenelemente der Erde im System Erde-Mond ($\Delta m = 1 \text{ kg}$)

	r_0 [m]	F_G [N]	$F(R_E)$ [N]
Sonne	$1,495 \cdot 10^{11}$	$0,594 \cdot 10^{-2}$	$0,506 \cdot 10^{-6}$
Mond	$3,84 \cdot 10^8$	$0,333 \cdot 10^{-4}$	$0,11 \cdot 10^{-5}$

Tab. 6.2: Größenvergleich zwischen Gezeitenkraft und Gravitation bezogen auf ein Massenelement $\Delta m = 1 \text{ kg}$ auf der Erdoberfläche ($\gamma = 6,668 \cdot 10^{-11}$, $M = 1,99 \cdot 10^{30}$, $m_E = 5,98 \cdot 10^{24}$, $m_M = 7,35 \cdot 10^{22}$, $R_E = 6,37 \cdot 10^6$).

Beispiele:

B6.4 Ebbe und Flut

Aus der Tabelle ersieht man, dass obwohl die Gravitation der Sonne 178 mal größer ist als die des Mondes, die Gezeitenkraft des Mondes an der Erdoberfläche mehr als doppelt so groß wie die der Sonne ist. Daraus erklärt sich auch, warum der Mond für die Ebbe und Flut verantwortlich ist. Die Gezeitenkraft des Mondes kann zwar die Erde nicht zerreißen, wohl aber die 'Wassermassen deformieren'. Die Erde dreht sich unter der deformierten Wasserfläche durch: so entstehen Ebbe und Flut. Schaut man genauer hin, so passiert noch mehr: Die Flutberge werden durch die Reibung an der rotierenden Erde etwas verschoben. Dadurch bildet sich ein Winkel zwischen der Richtung der Flutberge und der Verbindungslinie Erde-Mond. Diese 'Dephasierung' bewirkt zweierlei: (i) durch die Reibung zwischen Flutbergen und Erdoberfläche verlangsamt sich die Erdrotation und (ii) da die Massenverteilung des Wassers auf der Erde elliptisch verformt ist, ist die Gravitationskraft auf den Mond keine reine Zentralkraft mehr. D.h. die Gravitation der Erde vor

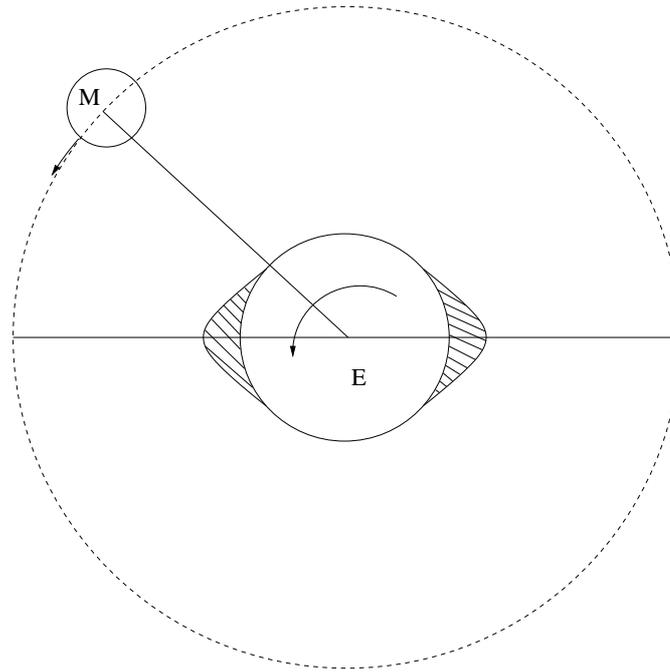


Abb. 6.12: Dephasierung durch Reibung der Flutberge an der Erdoberfläche.

dem Mond (bezogen auf die Bewegungsrichtung) ist stärker als 'hinter' dem Mond, was zu einer leichten Beschleunigung des Mondes auf seiner Bahn führt. Erhöht sich jedoch die Bahngeschwindigkeit des Mondes, wird die Zentrifugalkraft größer und der Mond wird sich langsam auf einer Spiralbahn von der Erde entfernen.

B6.5 Der Roche-Limes

Die Gezeitenkräfte können so stark werden, dass der Planet oder der Mond, der dem Gravitationszentrum zu nahe kommt, zerreißt. Den Mindestradius einer Kreisbahn $r_{0_{min}}$, unter dem ein Mond gerade noch durch seine eigene Gravitationskraft zusammenhält, erhält man aus der Bedingung, dass eine beliebige Masse Δm an der Oberfläche des Mondes bezüglich Gravitation des Mondes und Gezeitenkraft des Planeten in Gleichgewicht ist also

$$\gamma \frac{M_M \Delta m}{R_M^2} = 2\gamma \frac{M_P \Delta m}{r_0^3} R_M .$$

Nimmt man an, dass die Massen des Planeten und des Mondes homogen verteilt sind mit den Massendichten ρ_P bzw. ρ_M , so erhält man

$$\begin{aligned} M_P &= \frac{4}{3}\pi R_P^3 \rho_P \\ M_M &= \frac{4}{3}\pi R_M^3 \rho_M \\ r_0 &= R_P \sqrt[3]{\frac{2\rho_P}{\rho_M}} \end{aligned}$$

für den Minimalabstand (Roche-Limes) des Mondes vom Planeten. Eine genauere Analyse,

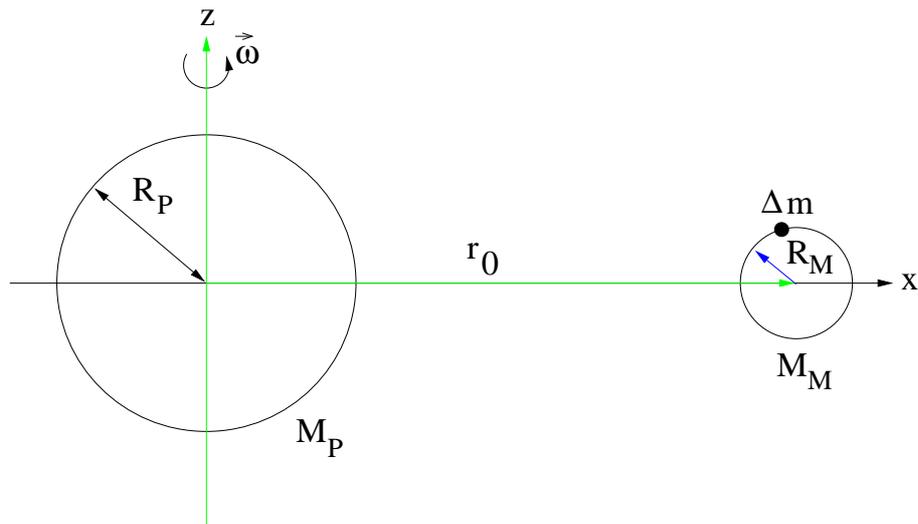


Abb. 6.13: Zur Bestimmung eines minimalen Mondabstandes

die die elliptische Deformation von Planet und Mond mit einbezieht zeigt, dass

$$r_0 = \alpha R_P \sqrt[3]{\frac{2\rho_P}{\rho_M}}, \quad \alpha = 2, 5.$$

Für die Erde gilt $r_0 = 2,9R_E$, d.h. wenn der Mond der Erde näher käme, würden Felsen aus der Mondoberfläche herausgerissen werden. Etwas ähnliches passierte mit dem Kometen

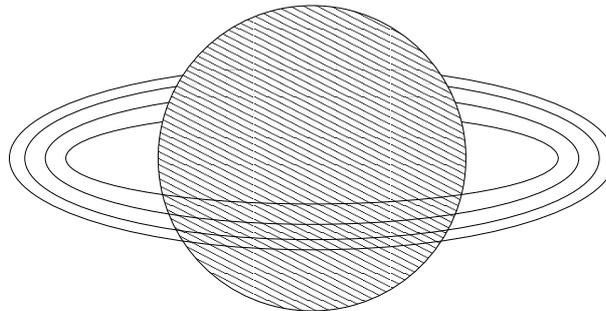


Abb. 6.14: Die Saturnringe liegen innerhalb des Roche-Limes

Shoemaker-Levy (1994), der in der Nähe des Jupiters zerrissen wurde. Die Unterschreitung des Roche-Limes ist auch die Ursache, dass die Materie der Saturnringe sich nicht zu einem Mond verdichten konnte.

Kapitel 7

Bewegung starrer Körper

Ein starrer Körper ist ein System von Massenpunkten mit fixierten Relativkoordinaten bezogen auf den Schwerpunkt des Körpers. Im Übrigen gelten alle Aussagen, die wir bisher für Systeme von Massenpunkten kennen gelernt haben: Energiesatz, Impulssatz und Drehimpulssatz mit den gegebenenfalls existierenden Erhaltungsgrößen.

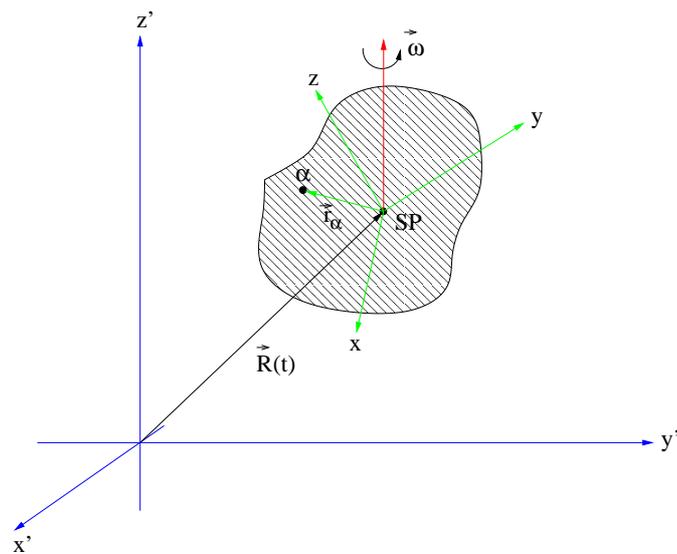


Abb. 7.1: Zur Definition der Bezugssysteme für die Bewegung eines starren Körpers

Die Bewegung eines starren Körpers können wir wie in Kapitel 6 ganz allgemein zerlegen in eine Translationsbewegung des Schwerpunktes relativ zum Inertialsystem S' und eine Rotationsbewegung beschrieben im körperfesten System S , wobei die Drehachse $\vec{\omega}$ zur körperfesten Achse beliebig orientiert sein kann.

7.1 Die kinetische Energie und der Trägheitstensor

Ein starrer Körper ist dadurch definiert, dass die Relativgeschwindigkeit aller Massenpunkte bezogen auf das körperfeste System verschwindet ($\vec{v}|_R = 0$). Somit gilt mit den

Ergebnissen aus Kapitel 6.1 für einen beliebigen Massenpunkt α (\vec{r}_α Relativkoordinate)

$$\vec{v}_\alpha \equiv \vec{v}|_I = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha .$$

Die kinetische Energie des starren Körpers ist dann

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{R}^2 + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{R}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 . \end{aligned}$$

Für den Mischterm gilt (beachte die Definition der Schwerpunktkoordinate)

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{R}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) &= \dot{\vec{R}} \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \right) \\ &= \dot{\vec{R}} \cdot (\vec{\omega} \times M \vec{R}|_R) . \end{aligned}$$

Da \vec{r}_α die Relativkoordinate bezogen auf den Schwerpunkt ist, ist $\vec{R}|_R$ die Schwerpunktkoordinate bezogen auf das Schwerpunktsystem, also $\vec{R}|_R = 0$. Somit verschwindet der Mischterm und man erhält

$$\begin{aligned} T &= T_{trans} + T_{rot} \\ T_{trans} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{R}^2 = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 \\ T_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 \end{aligned}$$

Wie bereits intuitiv erwartet, erfolgt die Zerlegung der Bewegung in eine Translation des Schwerpunktes und eine Rotation um eine beliebige Achse durch den Schwerpunkt. Für das Quadrat des Kreuzprodukts erhält man aus allgemeinen Überlegungen

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 &= (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) \\ &= \omega^2 r_{\alpha}^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\alpha})^2 \end{aligned}$$

und somit für die kinetische Rotationsenergie

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\omega^2 r_{\alpha}^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\alpha})^2] .$$

Auswertung der Skalarprodukte in einem kartesischen Koordinatensystem, d.h. mit

$$\vec{r}_{\alpha} = (x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}, x_{\alpha,3})$$

und

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

ergibt

$$\begin{aligned}
 T_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 \omega_i^2 \sum_{k=1}^3 x_{\alpha,k}^2 - \sum_{i=1}^3 \omega_i x_{\alpha,i} \sum_{j=1}^3 \omega_j x_{\alpha,j} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{i,j=1}^3 m_{\alpha} \left(\omega_i \omega_j \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_{\alpha,k}^2 - \omega_i \omega_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right).
 \end{aligned}$$

Definiert man mit

$$\Theta_{ij} \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right)$$

die Matrixelemente des symmetrischen Trägheitstensors $\underline{\underline{\Theta}}$

$$\underline{\underline{\Theta}} \equiv \begin{pmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,2}^2 + x_{\alpha,3}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,2} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,3} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,1} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,3}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,3} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,3} x_{\alpha,1} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,3} x_{\alpha,2} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,2}^2) \end{pmatrix}$$

so erhält man für die kinetische Rotationsenergie

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \Theta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \underline{\underline{\Theta}} \vec{\omega}$$

(Mathematisch ist T_{rot} eine symmetrische Bilinearform). Die Diagonalelemente der Trägheitsmatrix $\Theta_{11}, \Theta_{22}, \Theta_{33}$ nennt man Trägheitsmomente, die außerdiagonalen Elemente $\Theta_{12} = \Theta_{21}, \Theta_{13} = \Theta_{31}, \Theta_{23} = \Theta_{32}$ Deviations- (oder Lager-) momente. Wir werden später sehen, dass sie ein Maß für die auf die Drehachse wirkenden Drehmomente sind. Haben wir es mit einer kontinuierlichen Massenverteilung der Dichte $\rho(\vec{r})$ zu tun - anstatt mit einem Drahtgittermodell diskreter starr verbundener Massenpunkte α - so gilt für die Elemente der Trägheitsmatrix

$$\Theta_{ij} = \int_V \rho(\vec{r}) \left(\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_k^2 - x_i x_j \right) d^3r \quad i, j = 1, \dots, 3$$

wobei die Integration über die kartesischen Komponenten ($d^3r = dx dy dz \equiv dx_1 dx_2 dx_3$) des Volumens V des starren Körpers auszuführen ist.

7.2 Berechnung von Trägheitsmomenten

7.2.1 Das Parallelachsen-Theorem: Satz von Steiner (1796-1863)

Angenommen wir kennen den Trägheitstensor $\underline{\underline{\Theta}}^{SP}$ für einen Körper bezogen auf eine Drehachse durch den Schwerpunkt des Körpers, wollen aber den Körper um eine parallele

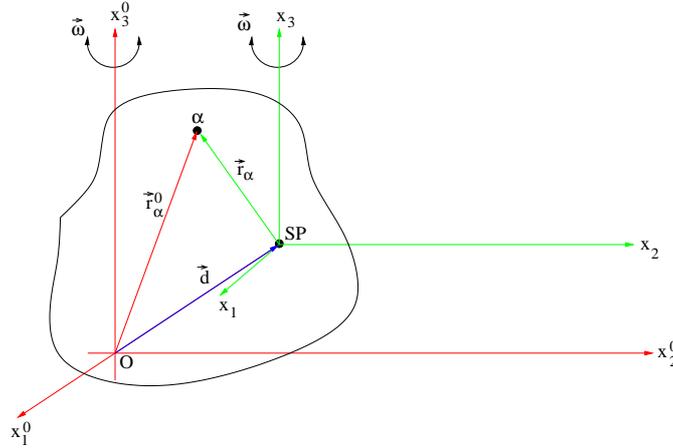


Abb. 7.2: Zur Geometrie des Parallelachsen-Theorems

Achse durch einen Punkt O des starren Körpers drehen. Kann man den Trägheitstensor $\underline{\underline{\Theta}}^O$ bezogen auf die neue Drehachse durch $\underline{\underline{\Theta}}^{SP}$ ausdrücken? Bezeichnet man die Position eines beliebigen Punktes α im starren Körper durch \vec{r}_α (bezogen auf das Schwerpunktsystem) bzw. \vec{r}_α^o (bezogen auf das O -System), so gilt wegen $\vec{r}_\alpha^o = \vec{r}_\alpha + \vec{d}$ für die Elemente der Trägheitsmatrix bezogen auf die Drehachse x_3^o

$$\begin{aligned}
 \Theta_{ij}^o &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_{\alpha,k}^o{}^2 - x_{\alpha,i}^o x_{\alpha,j}^o \right) \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 (x_{\alpha,k} + d_k)^2 - (x_{\alpha,i} + d_i)(x_{\alpha,j} + d_j) \right) \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right) \\
 &\quad + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 (2x_{\alpha,k} d_k + d_k^2) - (d_i x_{\alpha,j} + d_j x_{\alpha,i} + d_i d_j) \right) \\
 &= \Theta_{ij}^{SP} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 d_k^2 - d_i d_j \right) \\
 &\quad + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(2\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_{\alpha,k} d_k - d_i x_{\alpha,j} - d_j x_{\alpha,i} \right)
 \end{aligned}$$

mit

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \equiv M \quad ; \quad \sum_{k=1}^3 d_k^2 = d^2 \quad (\text{Länge von } \vec{d})$$

folgt

$$\Theta_{ij}^o = \Theta_{ij}^{SP} + M (d^2 \delta_{ij} - d_i d_j) + 2\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 d_k \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,k} - d_i \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,j} - d_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,i} .$$

Im Schwerpunktsystem gilt: jede Komponente der Schwerpunktkoordinate (hier die k . Komponente) verschwindet im Schwerpunktsystem, also

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,k} = 0 .$$

Man erhält schließlich

$$\Theta_{ij}^o = \Theta_{ij}^{SP} + M (d^2 \delta_{ij} - d_i d_j) .$$

Somit können wir den Trägheitstensor bezogen auf eine beliebig verschobene Drehachse berechnen. Für das Trägheitsmoment Θ_{22}^o bezogen auf die x_2 Achse als Drehachse gilt dann z.B.

$$\Theta_{22}^o = \Theta_{22}^{SP} + M (d_1^2 + d_3^2) .$$

Die Differenz der Trägheitsmomente bezogen auf den Schwerpunkt und O ist gleich der Gesamtmasse des Körpers M multipliziert mit dem Abstand zwischen den parallelen Drehachsen.

7.2.2 Trägheitsmoment einfacher starrer Körper

(i) Trägheitsmoment eines dünnen Stabes

Ein sehr dünner Stab der Länge l habe die Masse M , die homogen über den Stab verteilt sei. Folglich liegt der Schwerpunkt in der Mitte des Stabes und die Massendichte $\rho = \frac{M}{l}$ ist konstant. Die Drehachse ist senkrecht zum Stab gewählt.

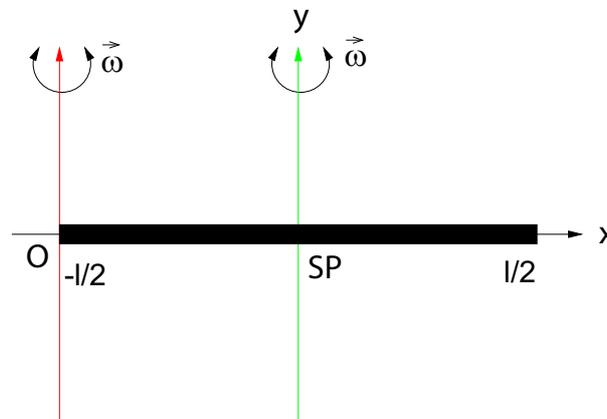


Abb. 7.3: Dünnner Stab

Das entsprechende Trägheitsmoment ist dann

$$\Theta_{yy}^o \equiv \Theta^{SP} = \int_{-l/2}^{l/2} \rho x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{M}{l} x^3 \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{24} \frac{M}{l} 2l^3 = \frac{1}{12} Ml^2 .$$

Nach dem Steiner'schen Satz ergibt sich das Trägheitsmoment bezogen auf eine parallele Achse durch den Endpunkt des Stabes zu

$$\Theta^o = \Theta^{SP} + M \left(\frac{l}{2} \right)^2 = Ml^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} Ml^2 .$$

(ii) Trägheitsmoment einer kreisförmigen Scheibe

Eine dünne, kreisförmige Scheibe mit Radius R und homogener Masse M drehe sich um eine Achse durch den Schwerpunkt senkrecht zur Scheibenfläche.

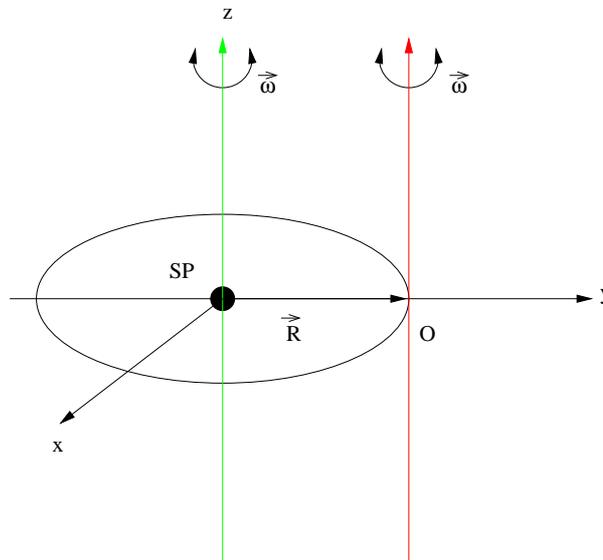


Abb. 7.4: Kreisscheibe

Mit $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ ist

$$\Theta_z^{SP} = \int_V \frac{M}{\pi R^2} (x^2 + y^2) dx dy ,$$

wobei das Volumen der Kreisfläche $x^2 + y^2 \leq R^2$ entspricht. Bei der Transformation von kartesischen Koordinaten in ebene Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ gilt für das Volumenelement $dx dy = r dr d\varphi$ (siehe 'Funktionaldeterminante' im Skript zur Differential- und Integralrechnung) und somit

$$\Theta_z^{SP} = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\varphi = 2\pi \frac{M}{\pi R^2} \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} MR^2$$

bzw.

$$\Theta_z^o = \Theta_z^{SP} + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2 .$$

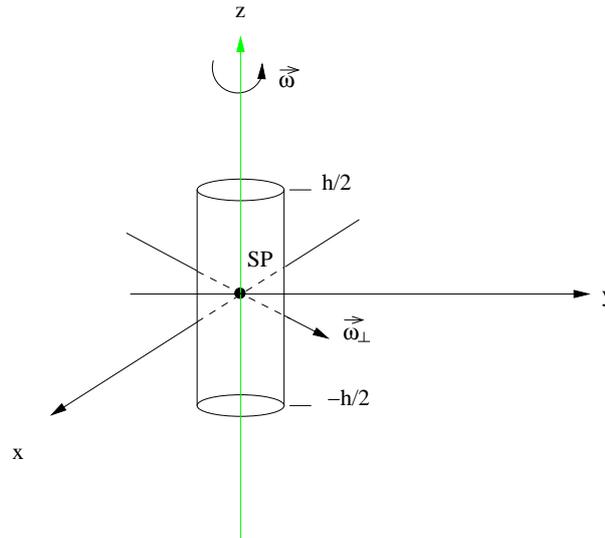


Abb. 7.5: Zylinder

(iii) Trägheitsmoment eines Zylinders

Für einen Zylinder der Höhe h und der Masse M erhält man ($\rho = \frac{M}{\pi R^2 h}$)

$$\Theta_z^{SP} = \int_V \rho(x^2 + y^2) dx dy dz .$$

Die Integration kann leicht in Zylinderkoordinaten ausgeführt werden

$$\Theta_z^{SP} = \frac{M}{\pi R^2 h} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr (r^2) = \frac{M}{\pi R^2 h} h 2\pi \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} M R^2 .$$

Das Trägheitsmoment Θ_z^{SP} eines Zylinders lässt sich also mit einem Stapel von kreisförmigen Scheiben der Dicke dz vergleichen. Für das Trägheitsmoment bezogen auf eine Drehachse senkrecht zur z -Achse erhält man

$$\begin{aligned} \Theta_x^{SP} &\equiv \Theta_y^{SP} = \Theta_{\perp}^{SP} = \frac{M}{\pi R^2 h} \int_V (y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \frac{M}{\pi R^2 h} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) \end{aligned}$$

und mit

$$\int \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi$$

dann

$$\begin{aligned} \Theta_x^{SP} &\equiv \Theta_y^{SP} = \Theta_{\perp}^{SP} = \frac{M}{\pi R^2 h} \left(\frac{1}{4} R^4 \left(\frac{1}{2} 2\pi \right) h + \frac{1}{2} R^2 (2\pi) \frac{1}{3} \frac{h^3}{4} \right) \\ &= \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) . \end{aligned}$$

Offenbar zeichnen sich die gewählten Achsen als Symmetrieachsen des Zylinders aus. In diesem Fall gilt für ein beliebiges Deviationsmoment (z.B. Θ_{xy}^{SP})

$$\Theta_{xy}^{SP} = -\frac{M}{\pi R^2 h} \int_V xy dx dy dz = -\frac{M}{\pi R^2 h} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (r \cos \varphi)(r \sin \varphi) r dr$$

und mit

$$\int \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi$$

schließlich

$$\Theta_{xy}^{SP} = -\frac{M}{\pi R^2 h} \left(\frac{1}{4} R^4 \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{2\pi} h \right) = 0.$$

Wir werden sehen, dass die Deviationsmomente für eine Drehachse, die gleichzeitig eine Symmetrieachse des Körpers ist, immer verschwinden. In diesem Fall ist der Trägheitstensor diagonal

$$\Theta_{Zylinder}^{SP} = \frac{M}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

(Bezüglich der Symmetrieachse des Zylinders).

(iv) Homogene Kugel

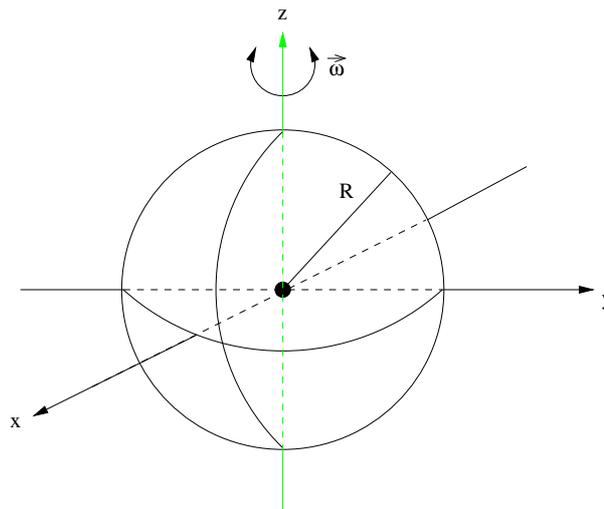


Abb. 7.6: Kugel

Zur Berechnung des Trägheitsmoments einer Kugel mit Radius R und Masse M wählt

man Kugelkoordinaten mit

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \sin \theta \\y &= r \sin \varphi \sin \theta \\z &= r \cos \theta \\dxdydz &= d^3r \equiv r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi.\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen sind die Trägheitsmomente alle gleich, d.h. es gilt exemplarisch

$$\begin{aligned}\Theta_z^{SP} &= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_V (x^2 + y^2) dxdydz \\&= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^R r^2 dr \left(r^2 \underbrace{\sin^2 \theta}_{(1-\cos^2 \theta)} \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_{=1} \right) \\&= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \left(\frac{1}{5} R^5 \left(2 - \frac{2}{3} \right) 2\pi \right) \\&= \frac{2}{5} MR^2.\end{aligned}$$

(v) **Homogener Quader**

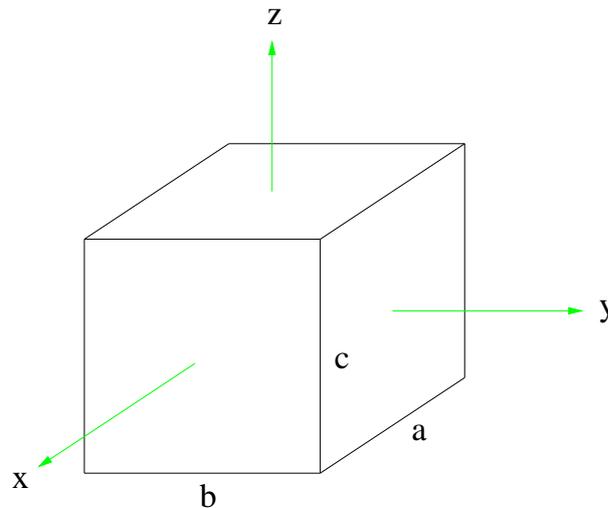


Abb. 7.7: Quader

$$\begin{aligned}\Theta_z^{SP} &= \frac{M}{abc} \int_V (x^2 + y^2) dxdydz \\&= \frac{M}{abc} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (x^2 + y^2) \\&= \frac{M}{abc} \left(cb \frac{1}{3} \frac{2a^3}{8} + c \frac{1}{3} \frac{2b^3}{8} a \right) \\&= \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\Theta_x^{SP} = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2)$$

und

$$\Theta_y^{SP} = \frac{1}{12}M(a^2 + c^2).$$

Für einen Würfel ($a = b = c$) findet man

$$\Theta_x^{SP} = \Theta_y^{SP} = \Theta_z^{SP} = \frac{1}{6}Ma^2.$$

7.3 Der Drehimpuls - Bewegungsgleichung eines starren Körpers

Bezogen auf ein körperfestes Schwerpunktsystem ist der Drehimpuls eines diskreten starren Körpers

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha} ; \quad \vec{v}_{\alpha} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}).\end{aligned}$$

Da Allgemein

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A}) = A^2 \vec{B} - \vec{A} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

gilt, folgt unmittelbar

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 \vec{\omega} - \vec{r}_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{\omega})).$$

Schreibt man diesen Ausdruck für eine beliebige Komponente (z.B. L_j) aus, so erhält man

$$\begin{aligned}L_j &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\omega_j \sum_{k=1}^3 x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,j} \sum_{n=1}^3 x_{\alpha,n} \omega_n \right) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \sum_{n=1}^3 \left(\omega_n \delta_{jn} \sum_{k=1}^3 x_{\alpha,k}^2 - \omega_n x_{\alpha,j} x_{\alpha,n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^3 \omega_n \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{jn} \sum_{k=1}^3 x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,j} x_{\alpha,n} \right)}_{\Theta_{jn}} \\ &= \sum_{n=1}^3 \omega_n \Theta_{jn},\end{aligned}$$

bzw. in Vektorschreibweise

$$\vec{L} = \underline{\underline{\Theta}} \cdot \vec{\omega}.$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass die Vektoren $\vec{\omega}$ und \vec{L} im allgemeinen nicht gleichgerichtet sind, wenn die Matrix $\underline{\Theta}$ nicht diagonal ist (dass $\underline{\Theta}$ diagonal ist, ist nicht hinreichend, damit $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$. Es muss zusätzlich $\vec{\omega}$ parallel zu einer der Hauptachsen (siehe 7.4) gerichtet sein (siehe auch Beispiel B7.7)). D.h. der Drehimpuls eines rotierenden Körpers wird im allgemeinen in eine andere Richtung zeigen als die Drehachse!

B7.1 Rotierende Hantel

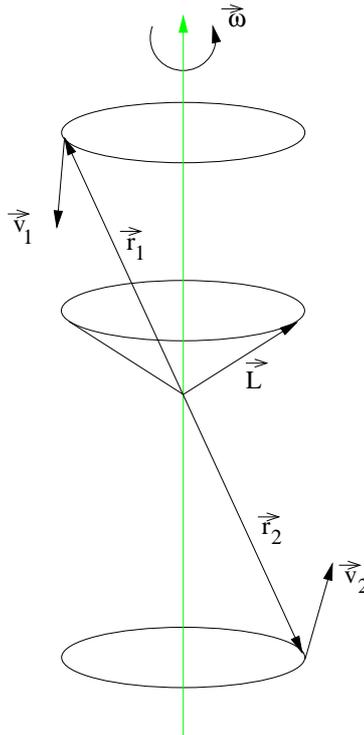


Abb. 7.8: Rotierende Hantel

Für die Geschwindigkeiten der beiden Massen m_α gilt

$$\vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$$

und für den Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^2 m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha .$$

\vec{L} steht senkrecht auf \vec{r} und \vec{v} . Da aber $\vec{\omega}$ nicht senkrecht auf \vec{r} steht, müssen $\vec{\omega}$ und \vec{L} einen Winkel zueinander besitzen. Hinzu kommt, dass \vec{L} zeitlich nicht konstant ist, sondern sich auf einem Kegel um die Drehachse mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ bewegt. Da aber \vec{L} von der Zeit abhängt, ist $\dot{\vec{L}} \neq 0$. Wir wissen aus dem Drehimpulssatz, dass eine zeitliche Änderung des Drehimpulses nur durch ein Drehmoment hervorgerufen werden kann, also

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \sum_{\alpha} \vec{M}_\alpha .$$

Andererseits gilt für einen zeitlich konstanten Trägheitstensor

$$\dot{\vec{L}} = \underline{\underline{\Theta}} \cdot \dot{\vec{\omega}},$$

so dass wir eine Bewegungsgleichung für den rotierenden Körper erhalten (bezogen auf ein körperfestes Schwerpunktsystem)

$$\underline{\underline{\Theta}} \cdot \dot{\vec{\omega}} = \sum_{\alpha} \vec{M}_{\alpha}.$$

(Beachte die Analogie zur Newton'schen Bewegungsgleichung $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$.) Wirken keine äußeren Drehmomente sind \vec{L} und somit $\vec{\omega}$ konstant (unter der Voraussetzung, dass $\underline{\underline{\Theta}}$ zeitlich konstant ist).

7.4 Hauptachsentransformation

Wir haben gesehen, dass im allgemeinen \vec{L} und $\vec{\omega}$ nicht gleich gerichtet sind. Wir können aber immer ein körperfestes Achsensystem finden, in dem der Trägheitstensor diagonal wird und somit \vec{L} und $\vec{\omega}$ gleichgerichtet sein können. Dieses ausgezeichnete System nennt man Hauptachsensystem, die zugehörigen Diagonalelemente des transformierten Trägheitstensors nennt man Hauptträgheitsmomente. Mathematisch erhält man das Hauptachsensystem aus dem Ansatz

$$\underline{\underline{\Theta}}\vec{\omega} = \Theta\vec{\omega}.$$

Man nennt diese Gleichung eine Eigenwertgleichung: Gesucht sind diejenigen Vektoren $\vec{\omega}$, die der Trägheitstensor $\underline{\underline{\Theta}}$ in sich selbst abbildet (gestreckt oder gestaucht). Die 3 Hauptachsenmomente $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ erhält man aus der Bedingungsgleichung für die Existenz einer nichttrivialen Lösung des homogenen Gleichungssystems (Säkulargleichung oder charakteristisches Polynom)

$$\det(\underline{\underline{\Theta}} - \Theta \cdot \underline{\underline{1}}) \equiv \begin{vmatrix} \Theta_{11} - \Theta & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} - \Theta & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} - \Theta \end{vmatrix} = 0.$$

Diese kubische Gleichung besitzt nur reelle Lösungen, da $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$. Haben wir das Hauptachsensystem gefunden, so gilt, falls $\vec{\omega}$ entlang einer Hauptachse gerichtet ist

$$\begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \vec{\omega} = \vec{L},$$

dass $\vec{\omega}$ und \vec{L} gleichgerichtet sind. Ist $\vec{\omega}$ konstant, so folgt unmittelbar, dass auch \vec{L} für diesen Fall konstant ist. Für ein beliebiges körperfestes System ist das nicht der Fall (siehe Hantel: \vec{L} ist zeitabhängig, obwohl $\vec{\omega}$ konstant ist). Daraus läßt sich folgende Interpretation ableiten:

- (i) Ist $\vec{\omega}$ konstant, so ist \vec{L} konstant, falls wir ein Hauptachsensystem gefunden haben ($\underline{\underline{\Theta}}$ ist diagonal) und die Drehachse einer Hauptachse entspricht.

(ii) Ist \vec{L} konstant, wirken keine Drehmomente.

Die Außerdiagonalelemente Θ_{ij} des Trägheitstensors sind also ein Maß für Drehmomente, die an den Lagern der Drehachse angreifen. Diese Lagermomente verschwinden, wenn wir den starren Körper um eine seiner Symmetrieachsen (allgemeiner Hauptachsen) rotieren lassen.

7.5 Beispiele

B7.2 Pirouetteneffekt

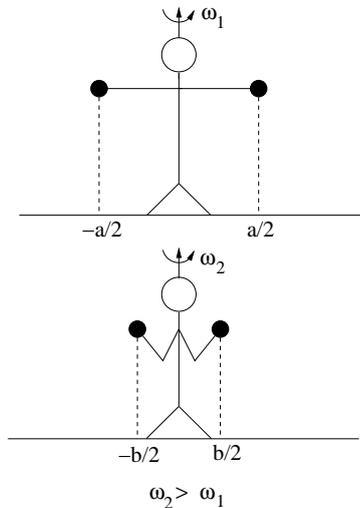


Abb. 7.9: Pirouetteneffekt

Ein Beispiel für die Erhaltung des Drehimpulses ist der Pirouetteneffekt. Durch die zeitliche Änderung des Trägheitsmomentes bezogen auf die Drehachse ändert sich bei konstantem Drehimpuls die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

$$L = \Theta_1 \omega_1 = \Theta_2 \omega_2 \quad \longrightarrow \quad \omega_2 = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \omega_1 .$$

Betrachtet man die Arme der Figur idealisiert als dünnen Stab, so ergibt sich mit $\Theta = \frac{1}{12} M a^2$

$$\omega_2 = \left(\frac{a}{b} \right)^2 \omega_1 ,$$

wobei $\frac{a}{2}$ die Armlänge bei ausgestrecktem Arm und $\frac{b}{2}$ der Körperradius bezogen auf die Längsachse bedeuten.

B7.3 Torsionspendel

Ein Torsionspendel besteht aus einer kreisförmigen Scheibe, die mittig senkrecht zur Scheibenfläche an einem Stahlseil aufgehängt ist. Für kleine Drehwinkel stellt sich eine harmonische Torsionsschwingung um die Ruhelage ein. Das resultierende Drehmoment ist

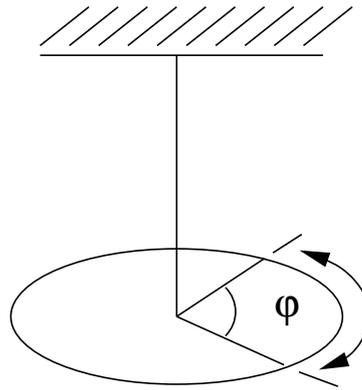


Abb. 7.10: Torsionspendel

proportional zum Auslenkwinkel $M = -c\varphi$, wobei c eine Materialkonstante (die Torsionskonstante) bedeutet. Die Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= M \\ &\rightarrow \Theta \dot{\omega} = \Theta \ddot{\varphi} = -c\varphi \\ &\rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{c}{\Theta} \varphi = 0. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung für den harmonischen Oszillator folgt sofort die Oszillatorfrequenz und die Periode

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{\frac{c}{\Theta}} \\ T &= \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{c}}. \end{aligned}$$

B7.4 Physikalisches Pendel

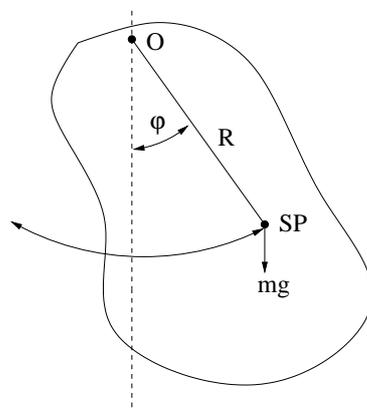


Abb. 7.11: Physikalisches Pendel

Im Gegensatz zum mathematischen Pendel, das Pendelfaden und Masse idealisiert, besteht das physikalische Pendel aus einem realistischen starren Körper, der um einen Aufhängepunkt O schwingt. Es folgt wieder aus dem Drehimpulssatz

$$\begin{aligned}\dot{L} &= M \\ \rightarrow \Theta \ddot{\varphi} &= -mgR \sin \varphi \approx -mgR\varphi\end{aligned}$$

mit der Frequenz und Periode

$$\begin{aligned}\Omega &= \sqrt{\frac{mgR}{\Theta}} \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgR}}.\end{aligned}$$

Interessant ist der Grenzfall $R \rightarrow 0$, d.h. das Pendel wird im Schwerpunkt (SP) aufgehängt: in diesem Fall ist $T \rightarrow \infty$, d.h. das Pendel befindet sich für jede Auslenkung φ in Ruhe, es dauert also unendlich lange, bis die Anfangsauslenkung wieder erreicht wird.

B7.5 Rollender Zylinder auf schiefer Ebene

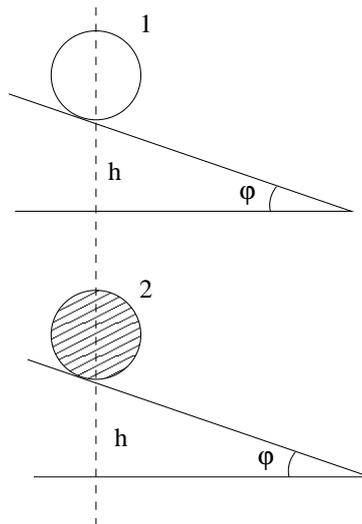


Abb. 7.12: Rollende Zylinder

Zwei äußerlich identische Zylinder mit Radius R und der selben Masse m rollen die selbe schiefe Ebene unter identischer Anfangsbedingung hinunter. Zylinder (2) erreicht das Ende der schiefe Ebene nach kürzerer Zeit als Zylinder (1). Warum? Zylinder (1) ist innen hohl, die Masse im Zylindermantel konzentriert, während Zylinder (2) eine homogene Massenverteilung besitzt. Die kinetische Energie lautet

$$\begin{aligned}T &= T_{trans} + T_{rot} \\ &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\Theta_1\omega_1^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\Theta_2\omega_2^2.\end{aligned}$$

Sie ist in beiden Fällen gleich, da die Zylinder aus der gleichen Höhe h starten. Die Translationsgeschwindigkeit der Zylinder erhält man aus den jeweiligen Winkelgeschwindigkeiten $v_j = \omega_j R$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\omega_1^2(mR^2 + \Theta_1) &= \omega_2^2(mR^2 + \Theta_2) \\ \omega_2^2 &= \omega_1^2 \frac{mR^2 + \Theta_1}{mR^2 + \Theta_2}.\end{aligned}$$

Da aber die Trägheitsmomente verschieden sind

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= mR^2 && \text{(Hohlzylinder)} \\ \Theta_2 &= \frac{1}{2}mR^2 && \text{(Vollzylinder)}\end{aligned}$$

und somit $\Theta_1 > \Theta_2$ ist, folgt daraus $\omega_2 > \omega_1$, d.h. der Zylinder mit homogener Massenverteilung erreicht eher das Ende der schiefen Ebene.

B7.6 Atwood Maschine

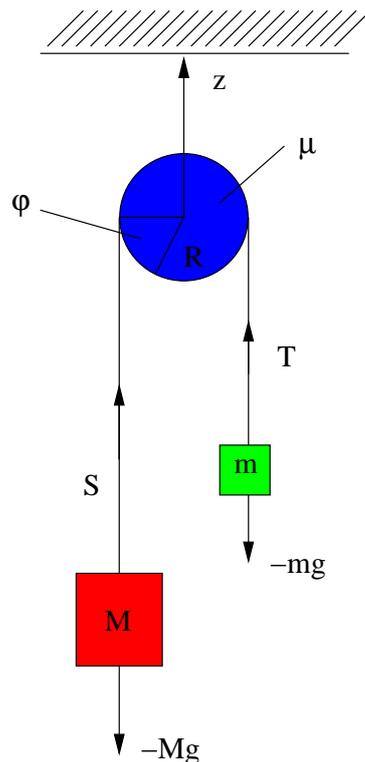


Abb. 7.13: Atwood Maschine

Zwei Lasten M und m sind durch ein Seil über eine feste Rolle mit Trägheitsmoment $\Theta = \frac{1}{2}\mu R^2$ verbunden. Stelle die Bewegungsgleichung für diese Atwood'sche Fallmaschine auf. Es gibt zunächst eine Bewegungsgleichung für jeden der 3 Körper (S und T entspre-

chen den jeweiligen Seilspannungen, die als Drehmomente an der festen Rolle angreifen):

$$\begin{array}{ll}
 M\ddot{z} = -Mg + S & \text{die schwere Masse wird nach unten beschleunigt,} \\
 m\ddot{z} = -(-mg + T) & \text{die leichtere Masse wird nach oben beschleunigt,} \\
 \Theta\ddot{\varphi} = (S - T)R & \text{die Rolle ändert ihren Drehimpuls entsprechend} \\
 & \text{dem resultierenden Drehmoment.}
 \end{array}$$

Da das Seil beide Massen schlupffrei verbindet, gibt es die einschränkende Bedingung

$$\ddot{z} = R\ddot{\varphi} \rightarrow \Theta\ddot{z} = (S - T)R^2 .$$

Somit erhalten wir 3 Gleichungen für S , T und \ddot{z} mit der Auflösung

$$\begin{aligned}
 \ddot{z} &= -\frac{M - m}{M + m + \frac{\Theta}{R^2}}g = -\lambda g \\
 S &= Mg(1 - \lambda) \\
 T &= mg(1 + \lambda) .
 \end{aligned}$$

B7.7 Kräftefreier Kreisel - Nutation

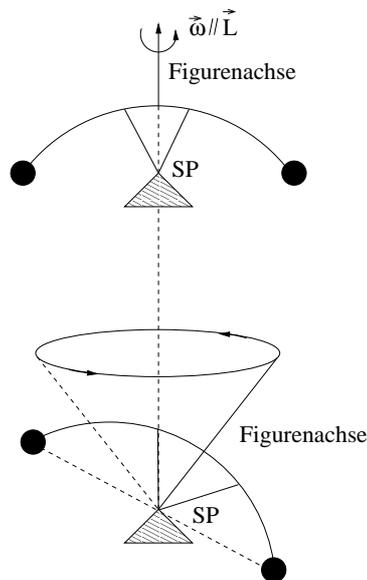


Abb. 7.14: Kräftefreier Kreisel (Nutation der Figurenachse)

Ein kräftefreier Kreisel ist ein Körper, der bezüglich einer ausgezeichneten Achse (Figurenachse), die durch den Schwerpunkt verläuft rotationssymmetrisch ist, und der im Schwerpunkt gelagert ist. Wird der Kreisel so gedreht, dass Figurenachse und momentane Drehachse $\vec{\omega}$ zusammenfallen, so sind Drehachse, Figurenachse und Richtung des Drehimpulses gleichgerichtet. Wird durch das Anfangsdrehmoment, mit dem man den Kreisel in Bewegung versetzt, die Drehachse gegenüber der Figurenachse geneigt (z.B. durch einen leichten Schlag gegen die Figurenachse des sich bereits drehenden Kreisels), so sind \vec{L}

Da die Scheibe nicht im Schwerpunkt sondern am Ende einer Achse der Länge R gelagert ist, wirkt die Gravitation auf die Scheibe ($\vec{F} = mg\vec{e}_x$) und erzeugt das Drehmoment $\vec{M} = \vec{R} \times m\vec{g} = Rmg\vec{e}_y$ bezüglich des Auflagepunktes.

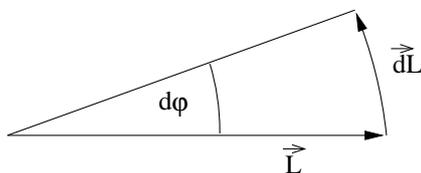


Abb. 7.16: Zur Drehung der Figurenachse im schweren Kreisel.

Der Kreisel reagiert auf das Drehmoment mit einer Drehimpulsänderung $d\vec{L} = \vec{M}dt$, die sich zum Drehimpuls des Kreisels addiert und die Figurenachse um den Winkel $d\varphi$ dreht

$$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{Mdt}{\Theta\omega} = \frac{mgR}{\Theta\omega} dt .$$

Die Ausweichbewegung des Kreisels aufgrund einer äußeren Kraft nennt man Präzession. Die Winkelgeschwindigkeit Ω der Präzession ist

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgR}{\Theta\omega} = \frac{mgR}{\frac{1}{2}ma^2\omega} = \frac{2gR}{a^2\omega} .$$

Kapitel 8

Einführung in die analytische Mechanik

Die Newton'sche Mechanik - mit der zentralen Aussage

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) ,$$

dass ein (System von) Massenpunkten sich entlang einer Trajektorie $\vec{r}(t)$ unter dem Einfluss einer äußeren Kraft \vec{F} gemäß dem 2. Newton'schen Gesetz bewegt - beschreibt die Dynamik klassischer (nicht relativistischer) Systeme korrekt. Solange die Bewegungsabläufe einfach sind und in kartesischen Koordinaten beschrieben werden können, sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen auch übersichtlich genug, um sie als gekoppelte Differentialgleichungen 2.Ordnung behandeln zu können. Das ändert sich sofort, wenn wir die Dynamik von Systemen untersuchen wollen, die (i) komplexere Symmetrien enthalten oder (ii) Zwangsbedingungen unterworfen sind (z.B. Bewegung auf gekrümmten Flächen). Intuitiv haben wir an einigen Beispielen gesehen, dass Symmetrien mit Erhaltungsgrößen verknüpft sind und wie der Einbau von Symmetrien in die Bewegungsgleichungen zu einer wesentlichen Vereinfachung der theoretischen Beschreibung führt. Diese lukrative Lösungsstrategie ist in der Newton'schen Mechanik nicht immer einfach umzusetzen. Sehr schwierig wird aber die explizite Behandlung von zusätzlichen Zwangskräften, die einen Massenpunkt im äußeren Kraftfeld z.B. auf einer vorgegebenen Bahn halten. Beschreiben Sie z.B. die Bewegung eines Wagens auf einem Achterbahn-Parcour! Stellen Sie sich vor wie kompliziert das System von Kräften aussehen muss, um den Wagen auf dem Parcour zu halten. Es wäre also von Vorteil, die Mechanik auf einer Ebene zu formulieren, die es erlaubt, Zwangsbedingungen und Symmetrien entweder automatisch oder explizit zu berücksichtigen. Eine Reformulierung der Newton'schen Mechanik aus einer verallgemeinerten Sicht ist Ziel dieses Kapitels. Dabei beschränken wir uns auf konservative Systeme. In verallgemeinerter Form lässt sich die nachfolgende Diskussion auf dissipative bzw. explizit zeitabhängige Systeme erweitern.

8.1 Hamilton's Prinzip

Wir werden sehen, dass sich die Newton'sche Bewegungsgleichung aus einem Extremalprinzip ableiten lässt: dem Hamilton'schen Prinzip der minimalen Wirkung. Es besagt, dass

von allen möglichen Pfaden zwischen zwei Punkten, die Dynamik eines Systems, innerhalb eines vorgegebenen Zeitintervalls, durch denjenigen Pfad beschrieben wird, für den das Zeitintegral über die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie minimal ist.

Mathematisch bedeutet dies, dass

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (8.1)$$

Der Integrand $T - U = L$ heißt Lagrangefunktion - besitzt die Dimension einer Energie, das Integral somit Energie*Zeit=Wirkung. Die Minimierung bedeutet, dass ein Massenpunkt in gegebener Zeit möglichst wenig Energie aufwenden möchte, um von einem Anfangsort zu einem Endpunkt zu kommen. Stellen Sie sich vor, Sie müssten einen Fluss

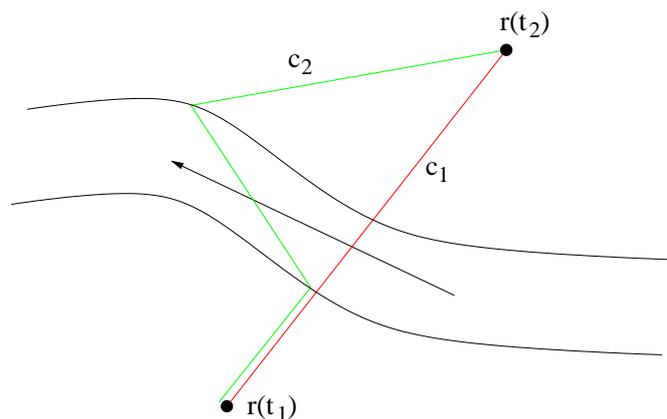


Abb. 8.1: Suche nach dem ökonomischsten Weg zwischen $\vec{r}(t_1)$ und $\vec{r}(t_2)$.

schwimmend überqueren, um von Ort $\vec{r}(t_1)$ nach $\vec{r}(t_2)$ zu kommen. Der kürzeste Weg entspricht dem Pfad c_1 . Aber ist dies auch der ökonomischste? Um den Fluss auf c_1 zu überqueren, müssen Sie viel Energie aufwenden, um gegen die Strömung anzukämpfen. Vernünftiger wäre es, sich entlang des Pfades c_2 abtreiben zu lassen, um dann auf dem bequemerem Landweg etwas schneller zu laufen, damit Sie in der gleichen Zeit $t_2 - t_1$ Ihr Ziel erreichen. Eine andere Aufgabe wäre in vorgegebener Zeit $t_2 - t_1$ von $\vec{r}(t_1)$ nach $\vec{r}(t_2)$ zu laufen, aber unter der Zwangsbedingung, dass Sie nur auf vorgegebenen Fußwegen Ihr Ziel erreichen dürfen. Der direkte Weg c_1 wäre versperrt und c_2 wäre der ökonomischste Weg unter den 'Fußweg Alternativen'. Warum die Lagrangefunktion L und nicht die Gesamtenergie $E = T + U$ das Wirkungsprinzip bestimmt, liegt daran, dass sich nur aus (8.1) die Newton'sche Bewegungsgleichung ableiten lässt. (In verallgemeinerter Form lässt sich die Diskussion auch auf dissipative bzw. explizit zeitabhängige Systeme erweitern.)

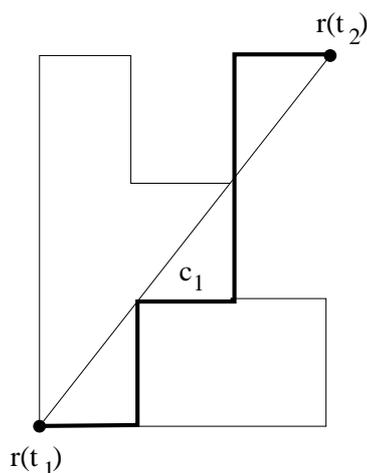


Abb. 8.2: Suche nach dem kürzesten Weg bei gegebener Zwangsbedingung

8.1.1 Variationsrechnung

Die entscheidende Frage ist, wie bestimmen wir eine Funktion $y(x)$ so, dass das Integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx$$

extremal wird?

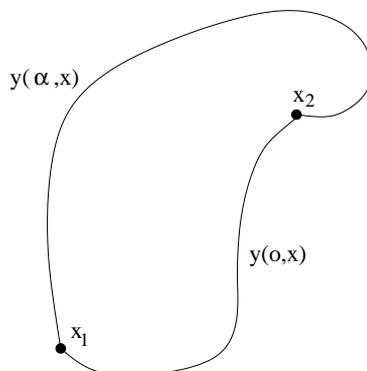


Abb. 8.3: Zwei Wege mit $y(\alpha, x_1) = y(0, x_1)$ und $y(\alpha, x_2) = y(0, x_2)$.

Dabei sind f und die Grenzen x_1, x_2 vorgegeben. Die Funktion $y(x)$ muss jetzt so variiert werden, dass I extremal wird. Nehmen wir an, die Schar möglicher Lösungen $y(\alpha, x)$ lässt sich durch einen zusätzlichen Parameter α charakterisieren, so dass

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha \xi(x)$$

mit der Bedingung, dass $\xi(x_1) = \xi(x_2) = 0$. (Alle Lösungen der Schar sollen in x_1 und x_2 übereinstimmen). Dann gilt für eine beliebige Funktion aus dieser Schar $I = I(\alpha)$ mit

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(\alpha, x), y'(\alpha, x), x) dx$$

und die Frage nach dem Extremum lautet

$$\frac{dI}{d\alpha} = 0 .$$

Daraus ergibt sich (x_1 und x_2 sind Konstanten) mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial x} \right) dx . \end{aligned}$$

Integriert man den 2. Term partiell, so erhält man

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

mit dem gewählten Ansatz für $y(\alpha, x)$ gilt $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \xi(x)$, so dass die Variation an den Randpunkten verschwindet

$$\left. \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} = \xi(x_2) - \xi(x_1) = 0 .$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \xi(x) dx = 0 . \end{aligned}$$

Damit $\frac{dI}{d\alpha}$ für beliebige Funktionen $\xi(x)$ verschwindet, muss gelten

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad \text{Euler-Gleichung (1744)}$$

Da f vorgegeben ist, bildet die Euler-Gleichung eine Differentialgleichung für $y(x)$.

8.2 Lagrange-Gleichungen

Wir sind jetzt in der Lage das Prinzip der minimalen Wirkung auszuwerten. Mit $L = T - U$ ist die Lagrangefunktion also abhängig von Ort und Geschwindigkeit aller Teilchen eines Systems von N Massenpunkten

$$\begin{aligned} L &= L(x_j, \dot{x}_j) , \quad j = 1, \dots, 3N \\ \vec{r}_{3k-2} &= (x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k}) , \quad k = 1, \dots, N . \end{aligned}$$

Das Extremalprinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_j, \dot{x}_j) dt = 0 \tag{8.2}$$

erfordert somit eine Lösung $(x_j(t), j = 1, \dots, 3N)$, für die gilt

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = 0, \quad j = 1, \dots, 3N.$$

Dies sind die Lagrange'sche Bewegungsgleichung der Mechanik und wir wollen jetzt zeigen, dass sie äquivalent zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen sind. Dazu müssen wir berücksichtigen, dass die Lagrange-Funktion nur für konservative Kräfte formuliert werden kann. Nur wenn $\vec{F} = -\nabla U$ (also \vec{F} konservativ ist), lässt sich das Bewegungsproblem durch ein Potential U charakterisieren. Das Potential ist aber nur eine Funktion des Ortes. Für einen einzelnen Massenpunkt gilt dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(x_1, x_2, x_3).$$

Aus den Lagrange-Gleichungen folgt somit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = -\frac{\partial U}{\partial x_j} - m\ddot{x}_j, \quad j = 1, \dots, 3N \\ &\rightarrow m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U. \end{aligned}$$

unmittelbar die Newton'sche Bewegungsgleichung. Wir können aber noch eine weitere interessante Eigenschaft aus den Lagrange-Gleichungen ablesen. Dazu betrachten wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j \equiv p_j, \quad j = 1, \dots, 3N$$

d. h. wir können die Lagrange Gleichung in der Form schreiben

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \equiv \frac{d}{dt} p_j = \frac{\partial L}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, 3N$$

Ist die Lagrange-Funktion von einer der kartesischen Komponente unabhängig, so folgt daraus sofort, dass der Impuls dieser Komponente eine Erhaltungsgröße ist

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} p_j = 0 \rightarrow p_j(t) = \text{konst.}$$

Man bezeichnet die Koordinate x_j , für die $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$ ist als 'zyklische Koordinate'. Sie enthält offenbar eine Symmetrie des Potentials: man nennt das System translationsinvariant in der zyklischen Koordinate. Diese Translationsinvarianz ist wiederum äquivalent zur Erhaltung des Impulses, welcher der zyklischen Koordinate zugeordnet ist. Diese Äquivalenz zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen ist ein wesentliches Element der analytischen Mechanik. In seiner verallgemeinerten Form wurde von Emily Noether (1882-1935) bewiesen, dass die Invarianz der Lagrange-Funktion gegenüber Symmetrietransformationen immer die Existenz einer Erhaltungsgröße zur Folge hat.

Nun wird man mit Recht behaupten, dass sich der Aufwand zur Ableitung der Lagrange-Gleichung bisher kaum gelohnt habe: solange man sich auf kartesische Koordinaten beschränkt, hätte man schließlich auch die Newton'sche Bewegungsgleichung diskutieren können. Es ist also an der Zeit, dass wir das Konzept, das hinter dem Hamilton-Prinzip steckt, auf einer verallgemeinerten Basis erweitern.

8.2.1 Generalisierte Koordinaten

Betrachten wir ein System aus N Massenpunkten, so haben wir gesehen, dass ohne weitere Einschränkungen dieses System $3N$ Freiheitsgrade besitzt. In der Regel sind jedoch die N Massenpunkte einer Reihe von Zwangsbedingungen unterworfen: einige Massenpunkte sind fest miteinander verbunden und formen einen starren Körper, einige Massenpunkte können sich nur auf einer vorgegebenen Fläche oder Raumkurve (Achterbahn!) bewegen. Jede dieser Zwangsbedingungen reduziert die Zahl der Freiheitsgrade, so dass bei S Zwangsbedingungen die N Massenpunkte nur noch $3N - S$ Freiheitsgrade besitzen. Diese reduzierte Zahl von Freiheitsgraden wollen wir auf eine Zahl von $3N - S$ verallgemeinerte (generalisierte) Koordinaten abbilden. Der Begriff 'generalisiert' impliziert, dass diese Koordinate nicht mehr ausschließlich die Dimension einer Länge haben müssen: es könnten Winkel, Energie oder dimensionslose Größen als generalisierte Koordinaten geeignet sein, um die S Zwangsbedingungen zu berücksichtigen.

Beispiele

B8.1 Das ebene Pendel

Die Pendelmasse eines ebenen Pendels wird zu jeder Zeit durch eine x - und y - Koordinate beschrieben, scheint also 2 Freiheitsgrade zu besitzen. Das ist aber nicht wahr: durch den Pendelfaden der festen Länge l kann sich das Pendel nur auf einer Kreisbahn um die Aufhängung bewegen. Es gibt also eine Zwangsbedingung

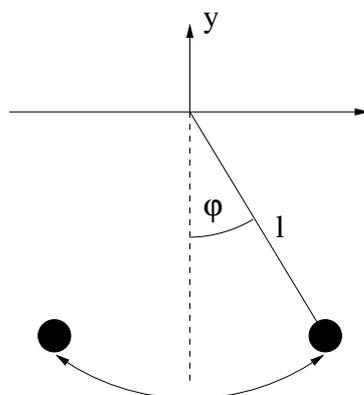


Abb. 8.4: Zwangsbedingung $l = \text{konst.}$ im mathematischen Pendel.

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1 ,$$

welche die Zahl der Freiheitsgrade auf 1 reduziert. Gesucht ist somit eine generalisierte Koordinate, die diese Zwangsbedingung beinhaltet. Aus Erfahrung wissen wir, dass es sich bei der Zwangsbedingung um eine trigonometrische Relation handelt

$$\sin^2 q + \cos^2 q = 1 .$$

Unsere einzige generalisierte Koordinate q ist offenbar ein Winkel ($q \equiv \varphi$).

B8.2 Bewegung auf einer Kugel (z.B. Erdoberfläche)

Zur Beschreibung eines Massenpunktes auf der Erdoberfläche sind offenbar 2 generalisierte Koordinaten notwendig, denn die Zahl der Freiheitsgrade (3) wird um eine Zwangsbedingung

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1 \quad , \quad (\text{R: Radius der Kugel})$$

reduziert. Wir suchen Koordinaten q_1 und q_2 , die diese Zwangsbedingung erfüllen und probieren

$$\begin{aligned} \sin^2 q_1 \cos^2 q_2 + \sin^2 q_1 \sin^2 q_2 + \cos^2 q_1 &= \sin^2 q_1 (\cos^2 q_2 + \sin^2 q_2) + \cos^2 q_1 \\ &= \cos^2 q_1 + \sin^2 q_1 = 1 \end{aligned}$$

q_1 und q_2 sind offenbar wieder Winkel und tatsächlich wissen wir aus Erfahrung, dass jede Position auf der Erde durch die Angabe zweier Winkel (geographische Länge und Breite) vollständig bestimmt ist.

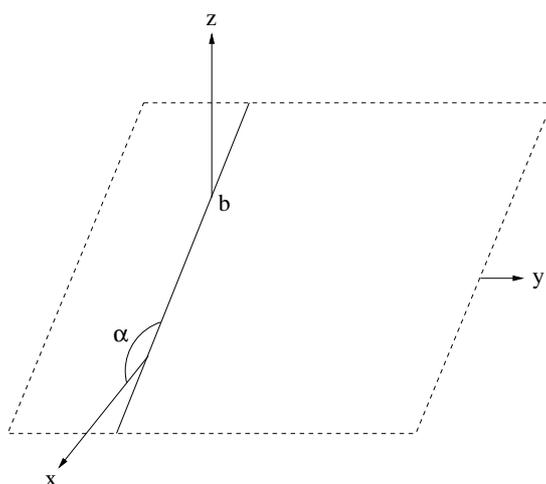


Abb. 8.5: Schiefe Ebene

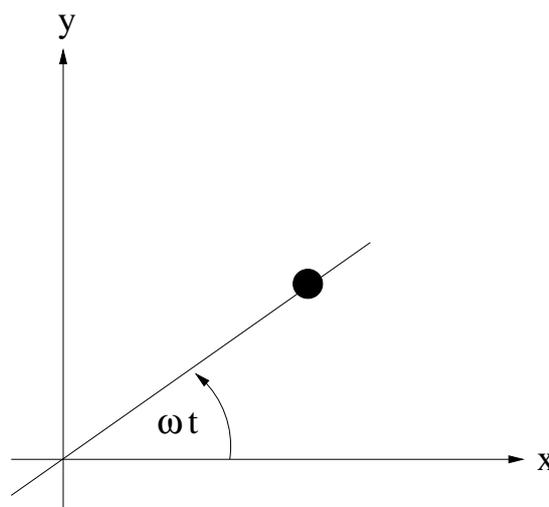


Abb. 8.6: Bewegung einer Perle entlang eines unendlich langen, starren, rotierenden oder wippenden Drahtes

B8.3 Bewegung auf einer schiefen Ebene

Die Bewegung auf einer schiefen Ebene wird durch die Zwangsbedingung

$$z - (\tan \alpha)x - b = 0 \quad , \quad (\text{y beliebig})$$

beschrieben. D.h. die Koordinaten des Massenpunktes müssen zu jeder Zeit die Zwangsbedingung erfüllen.

B8.4 Bewegung unter zeitabhängigen Zwangsbedingungen

Beispiele hierfür sind der rotierende Draht

$$y - (\tan \omega t)x = 0$$

und die Zwangsbedingung, die durch eine Wippe hervorgerufen wird

$$y - (a \sin \omega t)x = 0 .$$

Man klassifiziert die Zwangsbedingungen nach starren (skleronomen) oder zeitlich veränderlichen (rheonomen) Zwangsbedingungen. Ist eine Zwangsbedingung stetig bzw. lässt sich die Zwangsbedingung als totales Differential formulieren, so nennt man sie holonom.

Man sieht schon, dass es im allgemeinen nicht einfach sein wird generalisierte Koordinaten zu finden, die alle Zwangsbedingungen enthalten. Wir wollen jedoch annehmen, dass wir $3N - S$ generalisierte Koordinaten (q_α , $\alpha = 1, \dots, 3N - S$) für ein System von N Massenpunkten mit S Zwangsbedingungen kennen. Diesen generalisierten Koordinaten lassen sich generalisierte Geschwindigkeiten (\dot{q}_α , $\alpha = 1, \dots, 3N - S$) zuordnen. Ferner kennen wir den Zusammenhang zwischen den q_α und den kartesischen Koordinaten x_j , so dass sich mit

$$q_\alpha = q_\alpha(x_j), \quad \alpha = 1, \dots, 3N - S, \quad j = 1, \dots, 3N$$

die Lagrange-Funktion, die wir zunächst in kartesischen Koordinaten berechnet haben, bezüglich der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten ausdrücken lässt

$$\begin{aligned} L(x_j, \dot{x}_j) &= T(\dot{x}_j) - U(x_j) \\ &= T(q_\alpha, \dot{q}_\alpha) - U(q_\alpha) . \end{aligned}$$

Damit erhält man mit den selben Argumenten wie in Abschnitt 8.1.2 die Lagrange-Gleichungen in den $3N - S$ generalisierten Koordinaten

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, 3N - S .$$

Der Vorteil gegenüber den Newton'schen Bewegungsgleichungen ist, dass die Lagrange-Gleichungen immer die selbe Form haben, unabhängig von der speziellen Wahl der Koordinaten. Ebenfalls analog zu 8.1.2 definiert man die generalisierten Impulse

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, 3N - S .$$

Auch jetzt gilt: ist L aus Symmetriegründen nicht von q_α abhängig, so ist p_α eine (eventuell abstrakte) Erhaltungsgröße. q_α heißt in diesem Fall 'zyklische' Koordinate und enthält eine (eventuell abstrakte) Symmetrie.

8.2.2 Beispiele

B8.5 Kurbelmechanismus

Der Kurbelmechanismus dient dazu, eine Translations- in eine Rotationsbewegung umzuwandeln. Anwendungen sind vielfältig, z.B. der Antrieb der Kurbelwelle im Auto durch die Kolbenbewegung im Zylinder.

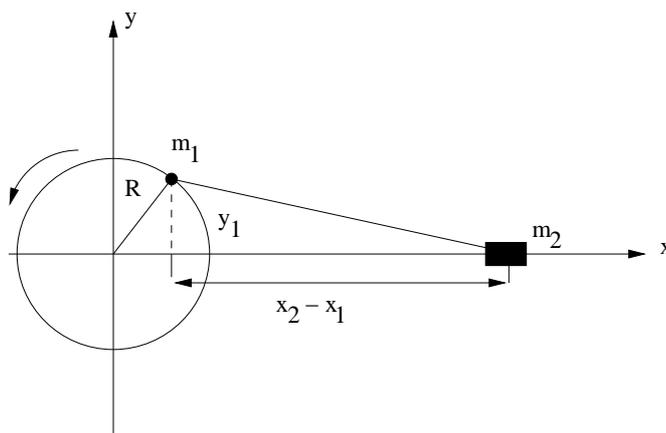


Abb. 8.7: Kurbelmechanismus

Wir wollen die Bewegung der Massen m_1 und m_2 beschreiben. Grundsätzlich haben wir für die $N = 2$ Massenpunkte $3N = 6$ Freiheitsgrade, die durch die folgenden Zwangsbedingungen eingeschränkt werden:

- (1) m_1 bewegt sich in der x-y-Ebene: $z_1 = 0$
- (2) m_1 bewegt sich auf einem Kreis mit Radius R: $x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0$
- (3) m_1 bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit: ω
- (4), (5) m_2 kann sich nur entlang der x-Achse bewegen: $y_2 = z_2 = 0$
- (6) m_1 und m_2 sind durch eine starre Stange verbunden: $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0$

Offenbar legen die 6 Zwangsbedingungen die 6 Freiheitsgrade der Massenpunkte vollständig fest. Es verbleibt kein Freiheitsgrad, der noch durch die Bewegungsgleichung zu bestimmen wäre. Man erhält aus (2) und (3) mit der Anfangsbedingung $x_1(0) = R$, $y_1(0) = 0$, $x_2(0) = R + l$

$$\begin{aligned}x_1(t) &= R \cos \omega t \\ y_1(t) &= R \sin \omega t\end{aligned}$$

und aus (4) - (6)

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 + y_1^2 - l^2 &= 0 \\ (R \cos \omega t - x_2)^2 + R^2 \sin^2 \omega t - l^2 &= 0 \\ x_2^2 - 2x_2 R \cos \omega t + R^2 - l^2 &= 0\end{aligned}$$

$$x_2 = R \cos \omega t + {}^1) \sqrt{R^2 \cos^2 \omega t - R^2 - l^2}$$

$$x_2 = R \cos \omega t + \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \omega t}$$

¹⁾Das '+'-Zeichen gilt, weil $x_2 \geq x_1$ sein muss, sonst bleibt die Kurbel hängen.

Es gibt einen interessanten Sonderfall für $l = R$ und die Anfangsbedingung $x_1(0) = R$, $y_1(0) = 0$, $x_2(0) = 2R$:

$$x_2 = R(\cos \omega t + \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}) = 2R \cos \omega t .$$

In diesem Fall schwingt die Kurbel über die Mitte des Kreises hinaus. Mit der Anfangsbedingung $x_1(0) = R$, $y_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ erhält man hingegen $x_2(t) = 0$, d.h. die Masse m_2 bleibt im Mittelpunkt und m_1 bewegt sich im Abstand R um m_2 herum.

B8.6 Bewegung eines Massenpunktes in einem Trichter

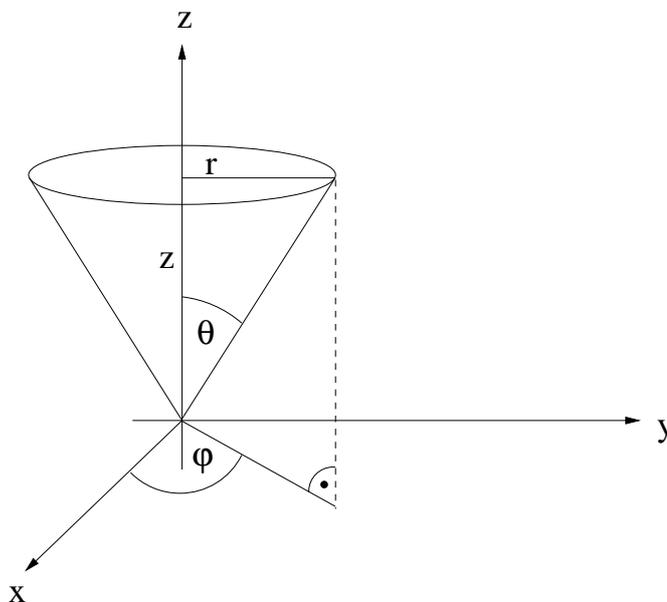


Abb. 8.8: Bewegung auf der Innenseite eines Kegels

Wegen der Zylindersymmetrie des Systems wählen wir Zylinderkoordinaten r , φ und z mit

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z .$$

Der Massenpunkt bewegt sich auf der Innenseite eines Kegels $z = r \cot \theta$. Somit verbleiben 2 Freiheitsgrade, die wir durch generalisierte Koordinaten (z.B. r , φ) beschreiben müssen. Zunächst beginnt man mit der Bestimmung der Lagrange-Funktion:

$$v^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 .$$

Unter Berücksichtigung der Kegelfläche findet man

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \cot^2 \theta = \dot{r}^2(1 + \cot^2 \theta) + r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{\dot{r}^2}{\sin^2 \theta} + r^2\dot{\varphi}^2$$

und somit

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2 \theta} + r^2\dot{\varphi}^2 \right) \\ U &= mgz = mgr \cot \theta \\ L &= T - U = \frac{1}{2}m \left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2 \theta} + r^2\dot{\varphi}^2 \right) - mgr \cot \theta \end{aligned}$$

Wir sehen, die Lagrange-Funktion ist nur noch von den zwei generalisierten Koordinaten r und φ abhängig, entsprechend der beiden Freiheitsgrade, die für eine Bewegung auf einer Fläche möglich sind. Wir sehen auch, dass die Bestimmung der generalisierten Koordinaten nicht eindeutig ist: Wir hätten über die Zwangsbedingung genauso gut r anstatt z eliminieren können. Ohne weitere Rechnung erkennt man, dass L nicht von φ abhängt. Offenbar ist φ eine zyklische Koordinate mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &\equiv \frac{d}{dt} p_\varphi = 0 \\ p_\varphi &= mr^2\dot{\varphi} = l = \text{konst.} \end{aligned}$$

Die Erhaltungsgröße p_φ entspricht dem Drehimpuls des Massenpunktes bezüglich der z -Achse. Somit verbleibt noch die Lagrange-Gleichung für r

$$0 = \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = mr\dot{\varphi}^2 - mg \cot \theta - \frac{m}{\sin^2 \theta} \ddot{r}.$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + g \sin \theta \cos \theta &= 0 \\ \ddot{r} - \frac{\sin^2 \theta l^2}{m^2 r^3} + g \sin \theta \cos \theta &= 0. \end{aligned}$$

8.3 Kanonische Bewegungsgleichung - Hamiltons Formulierung

Wir definieren die Hamilton-Funktion H eines mechanischen Systems (benutze die Definition des generalisierten Impulses $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$)

$$H = \sum_{\alpha} \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L \equiv \sum_{\alpha} \dot{q}_\alpha p_\alpha - L$$

und wollen zunächst zeigen, unter welchen Bedingungen sie eine Erhaltungsgröße ist

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha} \left(\ddot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{dL}{dt}$$

Mit Hilfe der Lagrange-Gleichung für $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ und der Kettenregel für $\frac{dL}{dt}$ findet man

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{\alpha} \left(\ddot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right) - \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

H ist also eine Erhaltungsgröße, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt. Die Hamilton-Funktion ist nun Ausgangspunkt einer Reformulierung der Bewegungsgleichung der klassischen Mechanik. Dazu betrachten wir die folgenden partiellen Ableitungen von H

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} &= \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \dot{p}_\alpha \\ \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \sum_{\beta} \dot{q}_\beta p_\beta = \sum_{\beta} \dot{q}_\beta \frac{\partial p_\beta}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha. \end{aligned}$$

Die resultierenden Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten und Impulse

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, 3N - S$$

nennt man die Hamilton'schen Gleichungen oder die kanonischen Bewegungsgleichungen. Sie sind äquivalent zu den Lagrange-Gleichungen und damit auch zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen. Die Hamilton Funktion eines Systems von Massenpunkten ist identisch mit der totalen mechanischen Energie, wenn die Zwangsbedingungen des Systems (i) holonom, d.h. unabhängig von der Geschwindigkeit der Massenpunkte, sowie (ii) skleronom, d.h. zeitunabhängig sind. In diesem Fall sind die generalisierten Koordinaten nur von den kartesischen Koordinaten der Massenpunkte abhängig, so dass $q_\alpha = q_\alpha(x_j)$: Man kann zeigen, dass unter solchen Zwangsbedingungen die kinetische Energie eine homogene quadratische Funktion der generalisierten Geschwindigkeit ist, d.h.

$$T = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} &= \sum_{\alpha\beta\gamma} \dot{q}_\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} (a_{\beta\gamma} \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma) \\ &= \sum_{\alpha\beta\gamma} \dot{q}_\alpha a_{\beta\gamma} (\delta_{\alpha\beta} \dot{q}_\gamma + \dot{q}_\beta \delta_{\alpha\gamma}) = 2T \end{aligned}$$

und man erhält für H (U ist unabhängig von der generalisierten Geschwindigkeit)

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\alpha} \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L = \sum_{\alpha} \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - (T - U) \\ &= 2T - T + U = T + U = E. \end{aligned}$$

Da H eine Erhaltungsgröße ist, ist auch E eine Erhaltungsgröße, wie wir das von einem konservativen System erwarten.

8.3.1 Poissonklammern - die systematische Suche nach Erhaltungsgröße

Betrachte zwei stetige Funktionen der generalisierten Koordinaten und Impulse $g(q_\alpha, p_\alpha)$ und $h(q_\alpha, p_\alpha)$. Die Poissonklammer dieser Funktionen ist definiert durch

$$\{g, h\} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial h}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial h}{\partial q_{\alpha}} \right).$$

Im allgemeinen verschwindet die Poissonklammer nicht: man sagt die Funktionen g und h vertauschen nicht miteinander. Wir werden jedoch sehen, dass die Poissonklammern ein nützliches Instrument sind, um Erhaltungsgrößen eines mechanischen Systems aufzuspüren. Dazu betrachten wir die totale Zeitableitung von g

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} \dot{p}_{\alpha} \right),$$

woraus sich mit Hilfe der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \\ &= \frac{\partial g}{\partial t} + \{g, H\} \end{aligned}$$

ergibt. Ist g nicht explizit zeitabhängig und vertauscht g mit H , so ist g offenbar eine Erhaltungsgröße des Systems, das durch die Hamilton-Funktion beschrieben wird. Insbesondere ist die Hamilton-Funktion selbst eine Erhaltungsgröße, falls sie nicht explizit zeitabhängig ist, da $\{H, H\} = 0$. Man kann zeigen, dass alle Symmetrietransformationen des Systems mit H vertauschen und erhält so systematisch die Erhaltungsgrößen des mechanischen Systems. Darüber hinaus gelten die folgenden Aussagen:

(i) Hamiltons Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{q}_{\alpha} &= \{q_{\alpha}, H\} = \sum_{\beta} \left(\underbrace{\frac{\partial q_{\alpha}}{\partial q_{\beta}}}_{=\delta_{\alpha\beta}} \frac{\partial H}{\partial p_{\beta}} - \underbrace{\frac{\partial q_{\alpha}}{\partial p_{\beta}}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial q_{\beta}} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \\ \dot{p}_{\alpha} &= \{p_{\alpha}, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \end{aligned}$$

(ii) Impulse und Koordinaten

$$\{p_{\alpha}, p_{\beta}\} = 0, \quad \{q_{\alpha}, q_{\beta}\} = 0, \quad \{q_{\alpha}, p_{\beta}\} = \delta_{\alpha\beta}.$$

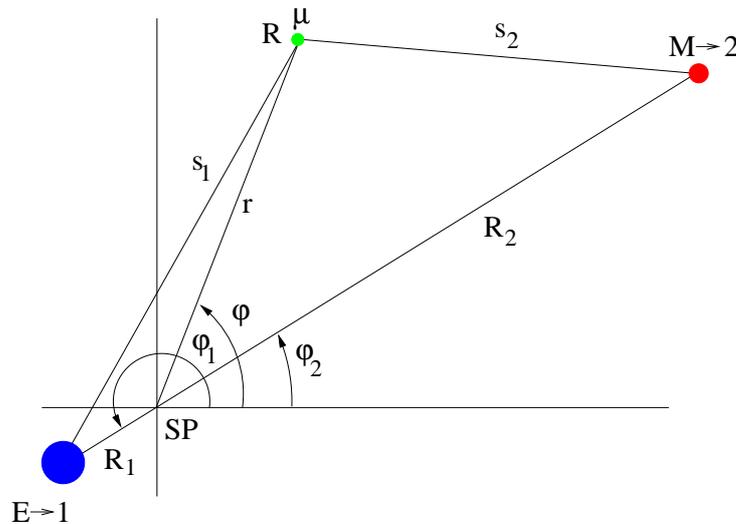


Abb. 8.9: Raumfestes Schwerpunktsystem

8.3.2 Bewegung eines Satelliten im System Erde-Mond

An diesem Beispiel wollen wir die Behandlung des eingeschränkten Dreikörperproblems etwas näher betrachten. Die Aufgabe wird sein u.a. eine Rakete auf einer ballistischen Flugbahn von der Erde zum Mond zu bringen und wieder zurück zur Erde.

Das Raumschiff bewegt sich also im Gravitationsfeld von Erde und Mond. Erde und Mond bewegen sich in guter Näherung auf Kreisbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt. Störungen von Sonne und Planeten schließen wir aus und die Masse des Raumschiffs ist zu klein, um Himmelskörper zu beeinflussen. Das ist also das Kennzeichen eines eingeschränkten Dreikörperproblems: ein Körper mit geringer Masse bewegt sich im zeitabhängigen Potential zweier massereicher Körper. Da keine äußeren Kräfte auf das System Erde-Mond-Raumschiff wirken, wird sich das Raumschiff bei entsprechender Anfangsbedingung in der Ebene der Mond-Erde Bahn bewegen. D.h. wir müssen ein zweidimensionales Anfangswertproblem lösen. Statt in kartesischen Koordinaten, wollen wir das Problem in System-angepaßten Koordinaten lösen: ebene Polarkoordinaten. Wir müssen zunächst alle Koordinaten bezüglich des raumfesten Schwerpunktsystems ausdrücken ($R = 38400 \text{ km}$ ist der als konstant angenommene Abstand zwischen Erde und Mond)

Die Masse des Raumschiffs ist μ und wir können jetzt die Lagrange-Funktion bestimmen

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \gamma \frac{m_1 \mu}{s_1} + \gamma \frac{m_2 \mu}{s_2}. \end{aligned}$$

Aus der Lagrange-Funktion erhalten wir die generalisierten Impulse

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \end{aligned}$$

Erde	$R_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}R; \varphi_1 (\varphi_1(0) = \pi)$
Mond	$R_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}R; \varphi_2 (\varphi_2(0) = 0), \varphi_1 = \varphi_2 + \pi$
Raumschiff	$r(t); \varphi(t) (r(0), \varphi(0))$
\overline{ER}	$s_1(t) = [r^2 + R_1^2 - 2rR_1 \cos(\varphi - \varphi_1)]^{1/2}$
\overline{MR}	$s_2(t) = [r^2 + R_2^2 - 2rR_2 \cos(\varphi - \varphi_2)]^{1/2}$
Geschwindigkeit des Raumschiffs	$ \dot{r}(t) , \dot{\varphi}(t)$

Tab. 8.1: Koordinaten im eingeschränkten Dreikörperproblem

und somit die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H &= \sum_k p_k \dot{q}_k - L \\ &= \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \gamma \frac{m_1 \mu}{s_1} - \gamma \frac{m_2 \mu}{s_2} \equiv T + U. \end{aligned}$$

Da das System als Zentralkraftproblem konservativ ist, also keine z.B. geschwindigkeits-abhängigen Potentiale enthält (z.B. Reibung), ist die Hamilton-Funktion identisch mit der Gesamtenergie. Bezüglich der generalisierten Impulse gilt

$$H = \frac{1}{2\mu} p_r^2 + \frac{1}{2\mu} \frac{p_\varphi^2}{r^2} - \gamma \frac{m_1 \mu}{s_1} - \gamma \frac{m_2 \mu}{s_2}$$

und man erhält die Hamilton-Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \dot{r} &= \frac{1}{\mu} p_r \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{\mu} \frac{p_\varphi}{r^2} \\ \dot{p}_r &= \frac{1}{\mu} \frac{p_\varphi^2}{r^3} - \gamma \frac{m_1 \mu}{s_1^3} (r - R_1 \cos(\varphi - \varphi_1)) - \gamma \frac{m_2 \mu}{s_2^3} (r - R_2 \cos(\varphi - \varphi_2)) \\ \dot{p}_\varphi &= -\gamma \frac{m_1 \mu}{s_1^3} r R_1 \sin(\varphi - \varphi_1) - \gamma \frac{m_2 \mu}{s_2^3} r R_2 \sin(\varphi - \varphi_2) \end{aligned}$$

für die Bewegung des Raumschiffes in dem durch die Bewegung von Erde und Mond zeitabhängigen Potential. Diese Bewegungsgleichungen müssen numerisch gelöst werden.

Interessante Fragen wären z.B.

- a) Untersuche die Störung erdferner Satellitenbahnen durch das Gravitationsfeld des Mondes.
- b) Bestimme die Anfangsbedingung für einen ballistischen Flug zum Mond mit Rückkehr zur Erde.

Literatur:

E.W. Schmid, G. Spitz, W. Lösch: *Theoretische Physik mit dem PC*, Springer, 1987.