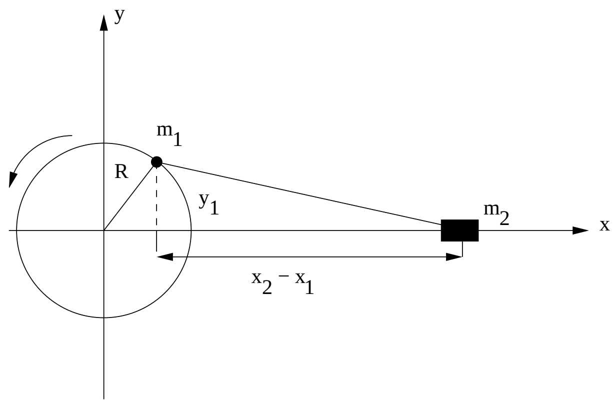
Lösungen - Kapitel 8

1

Der Kurbelmechanismus dient dazu, eine Translations- in eine Rotationsbewegung umzuwandeln. Anwendungen sind vielfältig, z.B. der Antrieb der Kurbelwelle im Auto durch die Kolbenbewegung im Zylinder.



Wir wollen die Bewegung der Massen m_1 und m_2 beschreiben. Grundsätzlich haben wir für die $N = 2$ Massenpunkte $3N = 6$ Freiheitsgrade, die durch die folgenden Zwangsbedingungen eingeschränkt werden:

(1)	m_1 bewegt sich in der x-y-Ebene:	$z_1 = 0$
(2)	m_1 bewegt sich auf einem Kreis mit Radius R:	$x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0$
(3)	x_1 bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit:	ω
(4), (5)	m_2 kann sich nur entlang der x-Achse bewegen:	$y_2 = z_2 = 0$
(6)	m_1 und m_2 sind durch eine starre Stange verbunden:	$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0$

Offenbar legen die 6 Zwangsbedingungen die 6 Freiheitsgrade der Massenpunkte vollständig fest. Es verbleibt kein Freiheitsgrad, der noch durch die Bewegungsgleichung zu bestimmen wäre. Man erhält aus (2) und (3) mit der Anfangsbedingung $x_1(0) = R, y_1(0) = 0$

$$x_1(t) = R\cos\omega t$$
$$y_1(t) = R\sin\omega t$$

und aus (4) - (6)

$$(x_1 - x_2)^2 + y_1^2 - l^2 = 0$$
$$(R\cos\omega t - x_2)^2 + R^2\sin^2\omega t - l^2 = 0$$
$$x_2^2 - 2x_2 R\cos\omega t + R^2 - l^2 = 0$$

$$x_2 = R\cos\omega t +^{1)} \sqrt{R^2\cos^2\omega t - R^2 - l^2}$$
$$x_2 = R\cos\omega t + \sqrt{l^2 - R^2\sin^2\omega t}$$

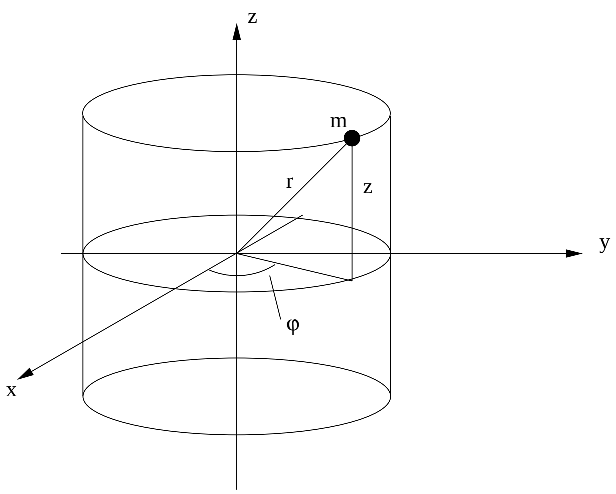
[1)]Das '+'-Zeichen gilt, weil $x_2 \geq x_1$ sein muss, sonst bleibt die Kurbel hängen.

Es gibt einen interessanten Sonderfall für $l = R$:

$$x_2 = R(\cos\omega t + \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}) = 2R\cos\omega t \ .$$

In diesem Fall schwingt die Kurbel über die Mitte des Kreises hinaus.

2



Die Zylinderoberfläche wird durch $x^2 + y^2 = R^2$ beschrieben. Wahl der generalisierten Koordinaten:

$$\begin{aligned} q_1 &= \varphi = \arctan\frac{y}{x} \\ q_2 &= z \\ q_3 &= x^2 + y^2 \ . \end{aligned}$$

Zwangsbedingung: $q_3 = R = const.$
D.h. q_1 und q_2 sind für die Beschreibung ausreichend. Umschreibung der kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_1 &= x = R\cos q_1 \ , & \dot{x}_1 &= -R\dot{q}_1 \sin q_1 \\ x_2 &= y = R\sin q_1 \ , & \dot{x}_2 &= R\dot{q}_1 \cos q_1 \\ x_3 &= z = q_2 \ , & \dot{x}_3 &= \dot{q}_2 \end{aligned}$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = \frac{1}{2}m(R^2\dot{q}_1 + \dot{q}_2^2)$$

Für die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} - Q_\mu = 0$$

benötigt man nicht die generalisierte Kraft

$$Q_\mu = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} \, .$$

$\mu = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial q_1} &= -R \sin q_1 \\
\frac{\partial x_2}{\partial q_1} &= R \cos q_1 \\
\frac{\partial x_3}{\partial q_1} &= 0 \\
Q_1 &= kR^2 \sin q_1 \cos q_1 - kR^2 \sin q_1 \cos q_1 = 0
\end{aligned}$$

$\mu = 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial q_2} &= \frac{\partial x_2}{\partial q_2} = 0 \\
\frac{\partial x_3}{\partial q_2} &= 1 \\
Q_2 &= -kq_2 - mg
\end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:
$\mu = 1$:

$$mR^2 \ddot{q}_1 = 0 \rightarrow \dot{q}_1 = 0 \rightarrow q_1 = c_1 + c_2 t$$

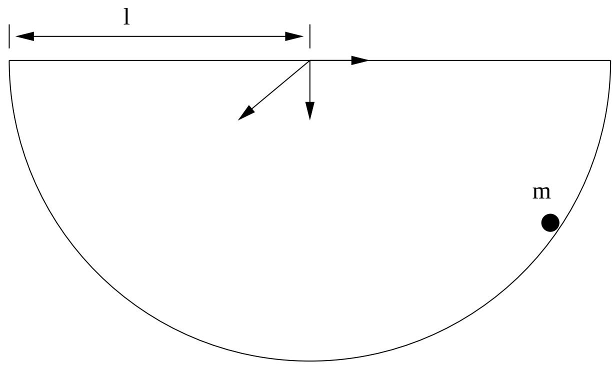
$\mu = 2$:

$$m\ddot{q}_2 + kq_2 + mg = 0 \rightarrow \ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_2 = -g \;\text{ mit }\; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung: $q_2 = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t - \frac{g}{\omega_0^2}$
Die Lösungen für q_1 und q_2 beschreiben die Überlagerung einer gleichförmigen Kreisbewegung in der x-y-Ebene ($\dot{q}_1 = \dot{\varphi} = const.$) durch eine harmonische Schwingung in z-Richtung. Einsetzen in die Anfangsbedingungen liefert:

$$c_1 = 0 \; , \; c_2 = \frac{v_0}{R} \; , \; A = \frac{g}{\omega_0^2} \; , \; B = \frac{v_0}{\omega_0} \; .$$

3



Zwangsbedingung: $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$
Elimination einer Koordinate möglich. Wähle Polarkoordinaten: $q_\mu = (\theta, \varphi)$

$$\begin{array}{ll} x = l\sin\theta\cos\varphi\ , & \dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - l\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \\ y = l\sin\theta\sin\varphi\ , & \dot{y} = l\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + l\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \\ z = l\cos\theta\ , & \dot{z} = l\dot{\theta}\sin\theta \end{array}$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

Potentielle Energie:

$$V = -mgl\cos\theta$$

Lagrange-Funktion $L = T - V$:

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + mgl\cos\theta$$

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

$$\begin{array}{lll} \varphi: & \frac{d}{dt}(ml\dot{\varphi}\sin^2\theta = 0 \rightarrow \dot{\varphi}\sin^2\theta = const. = A & (1) \\ \theta: & ml\ddot{\theta} - ml\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta + mgl\sin\theta = 0 & (2) \end{array}$$

Verwende (1) in (2)

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{A}^2\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta$$

Spezialfall ebenes Pendel $\varphi = 0 \rightarrow A = 0$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

Durch die Substitution $v = \frac{d\theta}{dt}$ bzw. $\frac{d^2\theta}{dt^2} = v\frac{dv}{d\theta}$ kann in der allgemeinen Bewegungsgleichung eine Integration ausgeführt werden:

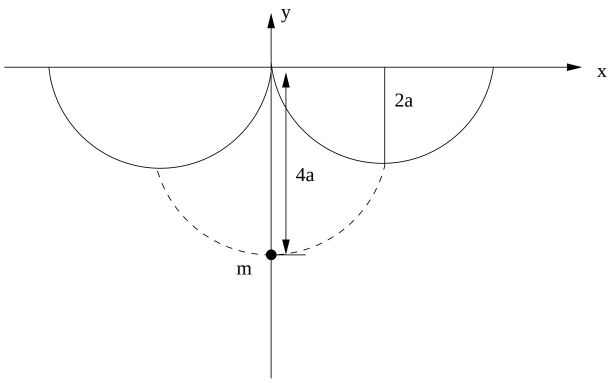
$$v = \sqrt{\frac{2g}{l}\cos\theta - \frac{A^2}{\sin^2\theta} + c}\ .$$

Eine weitere Integration führt auf ein elliptisches Integral.
Betrachte die z-Komponente des Drehimpulses:

$$L_z = ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = const.$$

Die Fläche, welche die Projektion des Ortsvektors auf die x-y-Ebene überstreicht, ist zeitlich konstant (Flächensatz, vgl. Kepler Gesetze).

4



Die vermeintlich einfachste Wahl für die generalisierte Koordinate ist der Parameter θ (Rollwinkel): $q_1 = \theta$

$$x = a(\theta + \sin\theta)\ , \quad \dot{x} = a\dot{\theta}(1 + \cos\theta)$$
$$y = -a(3 + \cos\theta)\ , \quad \dot{y} = a\dot{\theta}\sin\theta$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = ma^2\dot{\theta}^2(1 + \cos\theta)$$

Potentielle Energie:

$$V = mg(y + 4a) = mga(1 - \cos\theta)$$

$L = T - V$, Bewegungsgleichungen: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$\ddot{\theta} - \frac{\sin\theta}{2(1 + \cos\theta)}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{a}\frac{\sin\theta}{2(1 + \cos\theta)} = 0\ .$$

Dies ist eine sehr komplizierte Differentialgleichung, wähle daher eine andere generalisierte Koordinate:

$$q_2 = \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\theta = 2\arcsin q_2$$
$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2q_2\sqrt{1 - q_2^2}$$
$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2q_2^2$$

$$x = 2a(\arcsin q_2 + 2q_2\sqrt{1 - q_2^2})\ , \quad \dot{x} = 4\dot{q}_2 a\sqrt{1 - q_2^2}$$
$$y = -2a(2 - q_2^2)\ , \quad \dot{y} = 4a\dot{q}_2 q_2$$

Kinetische Energie:

$$T = 8ma^2\dot{q}_2^2$$

Potentielle Energie:

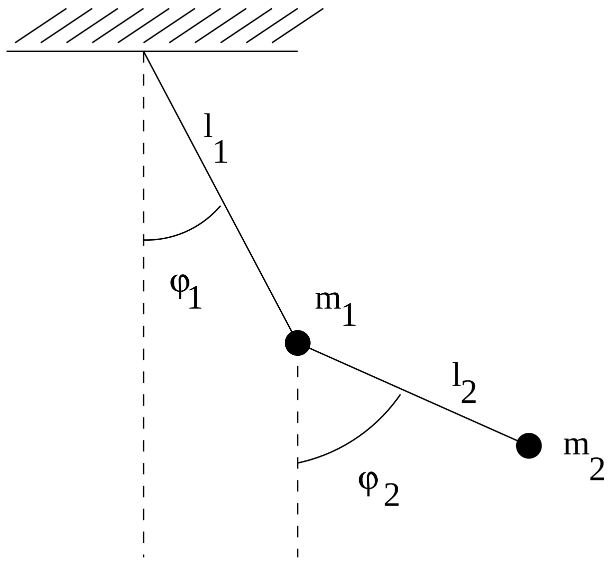
$$V = 2mgaq_2^2$$

Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$:

$$\ddot{q}_2 + \frac{g}{4a} q_2 = 0 \ .$$

Die Koordinate q_2 führt eine harmonische Schwingung mit der Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{4a}}$ bzw. mit der Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$ aus. Dieses Resultat hätte man auch durch eine entsprechende Substitution in der ursprünglichen Bewegungsgleichung mit der generalisierten Koordinate $q_1 = \theta$ erhalten.

5



Generalisierte Koordinaten φ_1, φ_2:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin\varphi_1 \\ y_1 &= -l_1 \cos\varphi_1 \\ x_2 &= l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \\ y_2 &= -l_1 \cos\varphi_1 - l_2 \cos\varphi_2 \end{aligned}$$

$$L = T - U = T_1 + T_2 - U_2 - U_2$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \\ U_1 &= -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 \\ T_2 &= \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}(l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ U_2 &= -m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2) \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1+m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

Bewegungsgleichungen: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_{1/2}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_{1/2}} = 0$

$$\begin{aligned}
1)\ &\frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)l_1^2\dot\varphi_1 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)\right] = \\
&- m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1\dot\varphi_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) - (m_1+m_2) g l_1 \sin\varphi_1 \\
2)\ &\frac{d}{dt}\left[m_2 l_2^2\dot\varphi_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \cos(\varphi_1-\varphi_2)\right] = \\
&m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1\dot\varphi_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) - m_2 g l_2 \sin\varphi_2\ .
\end{aligned}$$

Für kleine Schwingungsamplituden gilt

$$\begin{aligned}
\sin\varphi &\approx \varphi \\
\cos\varphi &\approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}\ .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
1)\ &\frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)l_1^2\dot\varphi_1 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_2 \left(1 - \frac{(\varphi_1-\varphi_2)^2}{2}\right)\right] = \\
&- m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1\dot\varphi_2 (\varphi_1-\varphi_2) - (m_1+m_2) g l_1 \varphi_1 \\
2)\ &\frac{d}{dt}\left[m_2 l_2^2\dot\varphi_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \left(1 - \frac{(\varphi_1-\varphi_2)^2}{2}\right)\right] = \\
&m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1\dot\varphi_2 (\varphi_1-\varphi_2) - m_2 g l_2 \varphi_2\ ,
\end{aligned}$$

und nach weiterer Auflösung

$$\begin{aligned}
1)\quad (m_1+m_2)(l_1\ddot\varphi_1 + g\varphi_1) + m_2 l_2(\ddot\varphi_2 + \dot\varphi_2^2(\varphi_1-\varphi_2)) &= 0 \\
2)\quad m_2(l_2\ddot\varphi_2 + g\varphi_2) + m_2 l_1(\ddot\varphi_1 + \dot\varphi_1^2(\varphi_1-\varphi_2)) &= 0\ .
\end{aligned}$$

Vernachlässigt man Terme der Form $\dot\varphi_i^2\varphi_j$ (d.h. $\cos\varphi_i \approx 1$), so erhält man

$$\begin{aligned}
1)\quad (m_1+m_2)(l_1\ddot\varphi_1 + g\varphi_1) + m_2 l_2\ddot\varphi_2 &= 0 \\
2)\quad m_2(l_2\ddot\varphi_2 + g\varphi_2) + m_2 l_1\ddot\varphi_1 &= 0\ .
\end{aligned}$$

Spezialfall $m_1 = m_2, l_1 = l_2 = l$:

$$\begin{aligned}
1)\quad 2(l\ddot\varphi_1 + g\varphi_1) + l\ddot\varphi_2 &= 0 \\
2)\quad l\ddot\varphi_2 + g\varphi_2 + l\ddot\varphi_1 &= 0\ .
\end{aligned}$$

6

Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&L = T - V\ , \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0
\end{aligned}$$

Hamilton-Gleichungen:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ ,$$
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ .$$

Übergang von Lagrange nach Hamilton durch eine Legendre-Transformation:

$$H(p,q,t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \ .$$

Für konservative Systeme entspricht die Hamiltonfunktion der Gesamtenergie und bleibt erhalten:

$$H = T + V \ .$$

Vorteil:
Man erhält die Konstanten der Bewegung unmittelbar aus den zyklischen Koordinaten:

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0 \ .$$

Lagrangegleichungen liefern n Differentialgleichungen 2. Ordnung, die Hamiltongleichungen 2n Differentialgleichungen 1. Ordnung.

7

a)

$$[F,G] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \right) = -\sum_\alpha \left(\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \right) = -[G,F]$$

Für die Poisson-Klammer gilt demnach nicht das Kommutativ-Gesetz der Algebra.

b)

$$\begin{aligned}
[F_1 + F_2, G] &= \sum_\alpha \left(\frac{\partial (F_1 + F_2)}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial (F_1 + F_2)}{\partial q_\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \right) \\
&= \sum_\alpha \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \right) + \sum_\alpha \left(\frac{\partial F_2}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \right) \\
&= [F_1, G] + [F_2, G]
\end{aligned}$$

Demnach erfüllt die Poisson-Klammer das Distributiv-Gesetz der Algebra.

c)

$$[F, q_r] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial q_r}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_r}{\partial p_\alpha} \right) = \frac{\partial F}{\partial p_r}$$

Denn es ist $\frac{\partial q_r}{\partial q_\alpha} = 1$ für $\alpha = r$ und 0 für $\alpha \neq r$. Dagegen gilt $\frac{\partial q_r}{\partial p_\alpha} = 0$ für alle α. Da r beliebig ist, folgt das gesuchte Ergebnis.

d)

$$[F, p_r] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p_r}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \frac{\partial p_r}{\partial p_\alpha} \right) = -\frac{\partial F}{\partial q_r}$$

Denn es ist $\frac{\partial p_r}{\partial q_\alpha} = 0$ für alle α, während $\frac{\partial p_r}{\partial p_\alpha} = 1$ für $\alpha = r$ und 0 für $\alpha \neq r$. Da r beliebig ist, folgt das gesuchte Ergebnis.