

Aufgaben - Kapitel 8

1. Diskutiere die Bewegung des Kurbelmechanismus.
2. Ein Teilchen bewegt sich auf der Oberfläche eines Zylinders unter der Einwirkung der Kraft $\vec{F} = -k(x, y, z) - m(0, 0, g)$. Bestimme die Bewegung für die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(0) &= R, & y(0) &= 0, & z(0) &= 0, \\ \dot{x}(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= v_0, & \dot{z}(0) &= v_0. \end{aligned}$$

3. Ein Massenpunkt bewegt sich im Schwerfeld der Erde in einer kugelförmigen Schale (Kugelpendel). Bestimme die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichung. Was sind günstige generalisierte Koordinaten? Wo steckt der Flächensatz und wie ist hier die geometrische Deutung?
4. Bestimme die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichung für das Zykloidenpendel. Parameterdarstellung der Bahn:

$$\begin{aligned} x &= a(\theta + \sin\theta) \\ y &= -a(3 + \cos\theta) \end{aligned}$$

Die Pendellänge beträgt $l = 4a$. (Benutze $q = \sin\frac{\theta}{2}$)

5. Bestimme die Bewegungsgleichung des Doppelpendels für kleine Ausschläge beider Massen.
6. Vergleiche die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen mit den Lagrangegleichungen 2. Art.
 - a) Worin bestehen Unterschiede bzw. Vor- und Nachteile?
 - b) Welche Aussagen können über die Hamiltonfunktion gemacht werden?
7. Gegeben sind die Funktionen F und G , die nur von den Koordinaten q_α , den Impulsen p_α und der Zeit t abhängen. Als Poissonklammer von F und G definiert man:

$$[F, G] = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial G}{\partial q_{\alpha}} - \frac{\partial F}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial G}{\partial p_{\alpha}} \right)$$

Beweisen Sie, dass:

- a) $[F, G] = -[G, F]$
- b) $[F_1 + F_2, G] = [F_1, G] + [F_2, G]$
- c) $[F, q_r] = \frac{\partial F}{\partial p_r}$
- d) $[F, p_r] = -\frac{\partial F}{\partial q_r}$