Lösungen - Kapitel 5

1

Eine Kreisbahn um die Erde erhält man, wenn die Zentrifugalbeschleunigung gerade die Gravitationsbeschleunigung aufhebt:

$$\vec{a}_z = -\vec{a}_g \quad \rightarrow \quad |\vec{a}_z| = |\vec{a}_g| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v^2}{r} = \frac{\gamma M}{r^2}, \tag{1}$$

wobei r der Abstand zum Erdmittelpunkt, γ die Gravitationskonstante $= 6,667 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kgsec^2}$, M die Erdmasse $= 6 \cdot 10^{24} kg$ und R_E der Erdradius $= 6,37 \cdot 10^6 m$ ist. Die Bahn wird stationär, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω der Bahnbewegung der Eigenrotation der Erde entspricht.

$$\omega_{Satellit} = \omega_{Erde} = \frac{2\pi}{T_{Erde}} \qquad T_{Erde} = 24h = 8,64 \cdot 10^4 sec$$

Für die Bahngeschwindigkeit gilt:

$$\vec{v} \quad = \quad \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \rightarrow \quad |\vec{v}| \quad = \quad \omega r \sin(\angle \vec{\omega}, \vec{r}) \quad = \quad \frac{2\pi r}{T}.$$

Aus (1) folgt dann

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r = \frac{\gamma M}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{\gamma M T^2}{4\pi^2} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}} \approx 4,23 \cdot 10^7 m$$

Der Abstand zur Erdoberfläche beträgt dann $r - R_{Erde} = 3,593 \cdot 10^7 m \approx 36000 km$.

2

Die Lösung der Bewegungsgleichung erfolgt komponentenweise.

$$\begin{aligned}
&a_x = \ddot{x} = -\omega^2 x \quad \text{mit den Anfangsbedingungen} \quad x(0) = 1 \quad , \quad \dot{x}(0) = 0 \\
&\rightarrow \quad \text{allg. Lösung} \quad x(t) = c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t \quad , \quad v_x = \omega(c_1 \cos\omega t - c_2 \sin\omega t) \\
&\text{aus der Anfangsbedingung folgt} \quad c_2 = 1 \quad , \quad c_1 = 0 \\
&\rightarrow \quad x(t) = \cos\omega t \quad , \quad v_x(t) = -\omega \sin\omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_y = \ddot{y} = -\omega^2 y \quad \text{mit den Anfangsbedingungen} \quad y(0) = 0 \quad , \quad \dot{y}(0) = \omega \\
&\rightarrow \quad \text{allg. Lösung} \quad y(t) = d_1 \sin\omega t + d_2 \cos\omega t \quad , \quad v_y = \omega(d_1 \cos\omega t - d_2 \sin\omega t) \\
&\text{aus der Anfangsbedingung folgt} \quad d_2 = 0 \quad , \quad d_1 = 1 \\
&\rightarrow \quad y(t) = \sin\omega t \quad , \quad v_y(t) = \omega \cos\omega t
\end{aligned}$$

$$a_z = \ddot{z} = 0 \quad \text{mit den Anfangsbedingungen} \quad z(0) = 0 \quad , \quad \dot{z}(0) = a$$
$$\rightarrow \quad z(t) = at + c_0 \quad \rightarrow \quad z(t) = at$$

Der Lösungsvektor lautet also :

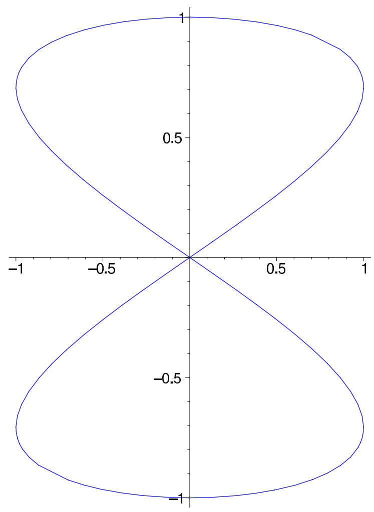
$$\vec{r}(t) = (\cos\omega t, \sin\omega t, at) \quad , \quad \vec{v}(t) = (-\omega\sin\omega t, \omega\cos\omega t, a)$$
$$\vec{a}(t) = (-\omega^2\cos\omega t, -\omega^2\sin\omega t, 0) \quad \text{Vergleiche mit der Aufgabenstellung !}$$

Besonders ist bei der Lösung zu bemerken, dass $\vec{a}\cdot\vec{v} = 0, a^2 = const$ und $v^2 = const$ gilt. Bitte überprüfen! In der x–y–Ebene handelt es sich um eine Kreisbewegung. Dieser ist eine gleichförmige Bewegung mit $v_z = a$ in z–Richtung überlagert. Die Gesamtbewegung ist also eine Schraubenlinie. Die Ganghöhe kann aus der Umlaufszeit berechnet werden. Für einen Umlauf gilt:

$$\omega T = 2\pi \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \rightarrow \quad z_{gang} = a\frac{2\pi}{\omega}$$

3

Lissajous-Figur:



Die vom "Fahrstrahl" $\vec{r}(t)$ in der Zeit dt überstrichene Fläche ist

$$dF \ = \ \frac{1}{2} \mid \vec{r}\times\vec{v} \mid dt.$$

Im vorliegenden Fall gilt

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (a\omega\cos\omega t, a\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\omega t)$$
$$(\vec{r}\times\vec{v})_z = A^2\omega(\frac{1}{2}\sin\omega t\cos\frac{1}{2}\omega t - \sin\frac{1}{2}\omega t\cos\omega t)$$
$$= A^2\omega\big(\sin\frac{1}{2}\omega t\cos^2\frac{1}{2}\omega t - \sin\frac{1}{2}\omega t(\cos^2\frac{1}{2}\omega t - \sin^2\frac{1}{2}\omega t)\big)$$
$$= A^2\omega\sin^3(\frac{1}{2}\omega t) \ ,$$

so dass

$$2 \mid F_z \mid = \mid \vec{r} \times \vec{v} \mid = \mid A^2 \omega^2 sin^3(\frac{1}{2}\omega t) \mid .$$

Offensichtlich ist der Flächensatz verletzt. Die Fläche wird durch Integration über eine Periode der Bewegung bestimmt. Wegen $\omega T/2 = 2\pi$ ist

$$F = \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \mid F_z \mid dt = 2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_z dt = A^2\omega \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^3 \frac{1}{2}\omega t \; dt$$

$$\text{substituiere} \quad t' = \frac{1}{2}\omega t, \quad dt' = \frac{1}{2}\omega dt$$

$$= 2A^2 \int_0^{\pi} \sin^3 t' dt'$$

$$\text{benutze} \quad \sin^3 t = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)$$

$$= \frac{1}{2}A^2 \left[-3\cos t + \frac{1}{3}\cos 3t \right]_0^{\pi} = \frac{8}{3}A^2 \; .$$

4

Eine Zentralkraft kann allgemein als $\vec{F} = f(r)\vec{r}_1$ mit $\vec{r}_1 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ geschrieben werden. Es gilt

$$\vec{r} \times \vec{F} = f(r)\vec{r} \times \vec{r}_1 = 0 \; .$$

Wegen $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ können wir schreiben:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \qquad \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = 0$$

$$\text{durch Integration}$$

$$\rightarrow \qquad \vec{r} \times \vec{v} = \vec{h}(= const.) \; .$$

Bildet man auf beiden Seiten der letzten Gleichung das Skalarprodukt mit $\vec{r}$, so erhält man auf Grund der Indentität $\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = (\vec{r} \times \vec{r}) \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{r} \cdot \vec{h} = 0 \; .$$

Da sowohl $\vec{r} \neq 0$ als auch $\vec{h} \neq 0$ gilt, muss $\vec{r}$ immer senkrecht zu $\vec{h}$ sein. Da $\vec{h} = const.$ gilt, kann sich $\vec{r}$ nur in einer Ebene bewegen.

5

Auf Grund von $\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ berechnen wir

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (r^2\vec{r}) = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\vec{L} = 0 \; ,$$

damit ist der Drehimpuls zeitlich konstant.

6

Mit $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ und $d\vec{r} = \vec{v}dt$ können wir das die Arbeit definierende Wegintegral in ein gewöhnliches Integral überführen:

$$A = \int \vec{F}d\vec{r} = m\int \ddot{\vec{r}}d\vec{r} = m\int_{t_0}^{t_1} \ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}dt = \frac{1}{2}m\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}})^2 dt = \frac{1}{2}m\Big[(\dot{\vec{r}})^2\Big]_{t_0}^{t_1}$$
$$= \frac{m}{2}(v_1^2 - v_0^2)\ .$$

v erhalten wir durch die Integration der Bewegungsgleichung:

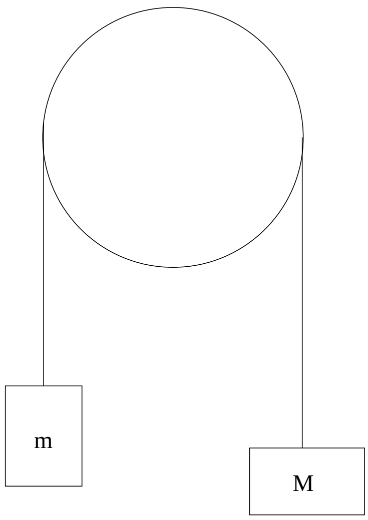
$$\dot{\vec{v}} = (2\pi\cos 2\pi t,\ 2\pi\sin 2\pi t,\ -g)$$
$$\rightarrow \quad \vec{v}(t) = (\sin(2\pi t)\ + c_1,\ -\cos 2\pi t\ + c_2,\ -gt\ + c_3)\ .$$

Mit $v(0) = (0,\ -1,\ 0)$ und $m = 1,\quad t = 1\ sec,\quad g = 10\ \frac{m}{sec}$ folgt daraus

$$A = \frac{1}{2}(1 + g^2t^2 - 1) = \frac{1}{2}g^2t^2 = 50\ Nm = 50\ Joule\ .$$

Die Angabe $\vec{r}(0)$ ist übrigens zur Lösung der Aufgabe überflüssig.

7



a) Die Bewegungsgleichungen der beiden Massen lauten:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$
$$\rightarrow \quad \text{für m} \quad 0,1\ \ddot{x} = -0,1\ g + T \tag{1}$$
$$\rightarrow \quad \text{für M} \quad 0,25\ddot{y} = -0,25g + T, \tag{2}$$

wobei T die Spannung am Seil ist. Die Länge des Seiles ist konstant.

$$\rightarrow \quad -x - y = l \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \ddot{y} = 0 \tag{3}$$

b) Dividieren wir die Gleichungen (1) und (2) durch ihre Massen ($m = 0,1 \quad M = 0,25$), addieren sie und benutzen (3), dann folgt:

$$0 = -g + \frac{T}{0,1} - g + \frac{T}{0,25} \quad \rightarrow \quad T = \frac{1}{7} g \approx 1,4 \ N$$
$$\rightarrow \quad F_m = 0,4 \ N \qquad F_M = -1,1 \ N$$

c) Energieerhaltung: Multipliziere (1) mit $\dot{x}$ und (2) mit $\dot{y}$ und addiere sie:

$$0,1\dot{x}\ddot{x} + 0,25\dot{y}\ddot{y} = -0,1g\dot{x} - 0,25g\dot{y} + T\underbrace{(\dot{x} + \dot{y})}_{=0}.$$

Auf Grund von $\dot{x}\ddot{x} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{x}^2)$ und dem entsprechenden Ausdruck für $\dot{y}$ können wir schreiben:

$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\frac{1}{2}(-0,1)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(0,25)\dot{y}^2}_{\text{gesamte kinetische Energie}} + \underbrace{0,1gx + 0,25gy}_{\text{gesamte potentielle Energie}}\Big] = 0$$

8

a) Aus

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{(R_E + h)^2 v_0^4 \sin^2(\phi)}{\gamma^2 M_E^2} - \frac{2(R_E + h) v_0^2 \sin^2(\phi)}{\gamma M_E}}$$

folgt für eine Kreisbahn ($\epsilon = 0$):

$$1 + \frac{(R_E + h)^2 v_0^4 \sin^2(\phi)}{\gamma^2 M_E^2} - \frac{2(R_E + h) v_0^2 \sin^2(\phi)}{\gamma M_E} = 0^2$$

bzw.

$$\left(1 - \frac{(R_E + h) v_0^2}{\gamma M_E}\right)^2 = 0$$

$$\longrightarrow \quad v_{0,\text{Kreis}} = \sqrt{\frac{\gamma M_E}{R_E + h}}.$$

Entsprechend erhält man für eine Parabel aus $\epsilon = 1$ die Startgeschwindigkeit :

$$v_{0,\text{Parabel}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\gamma M_E}{R_E + h}} = \sqrt{2} \cdot v_{0,\text{Kreis}}.$$

b) Der Drehimpuls ändert sich durch den Fehler im Höhenwinkel

$$L = m v_0 (R_E + h) \cdot \sin(88^0) \approx m v_0 (R_E + h) \cdot 0,9994.$$

Startet man den Satelliten mit der Geschwindigkeit für eine Kreisbewegung, so ändert sich durch den veränderten Höhenwinkel die numerische Exzentrizität von Null auf

$$\epsilon = \sqrt{1 - \sin^2(88^0)} \approx 0,035$$

Der erdnächste Punkt dieser Ellipsenbahn ($R_E = 6370km$) ist

$$r_{min} = \frac{p}{1+\epsilon} = \frac{L^2}{m^2\gamma M_E(1+\epsilon)} = (R_E + h) \cdot \frac{(0,9994)^2}{1,035} = 6330km < R_E$$

Bei einem Fehler von $\pm 2\%$ im Höhenwinkel stürzt der Satellit also auf die Erde. Allgemein nimmt der Drehimpuls mit zunehmender Exzentrizität ϵ ab. r_{min} ist bei ellipsenförmigen Bewegungen der Abstand des Perihels vom Koordinatenursprung, die Größe p wird als Parameter bezeichnet, $p = \frac{L^2}{m^2\gamma M}$.