Aufgaben - Kapitel 5

1. Ein Satellit umkreist die Erde in der Äquatorebene. In welcher Höhe über der Erdoberfläche muss er umlaufen, damit er stets über dem gleichen Punkt bleibt (geostationäre Bahn)?
2. Die Beschleunigung eines Massenpunktes ist durch

$$\vec{a} = (-\omega^2 x, -\omega^2 y, 0)$$

gegeben. Bestimme die Bahnkurve, wenn die Anfangsbedingungen lauten: $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)$ und $\vec{v}(0) = (0, \omega, a)$. Beschreibe die Bahnkurve und ihre Eigenschaften.

3. Berechne die Fläche der durch

$$\vec{r}(t) = A(\sin \omega t, \sin \frac{1}{2} \omega t)$$

definierten Lissajous-Figur. Wie sieht sie aus und gilt in diesem Fall der Flächensatz?

4. Zeige, dass sich eine Masse in einem zentralen Kraftfeld auf einer ebenen Bahn bewegt.
5. Ein Teilchen bewegt sich im Kraftfeld $\vec{F} = r^2 \cdot \vec{r}$, wobei $\vec{r}$ sein Positionsvektor ist. Zeige, dass der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist.
6. Eine zeitlich veränderliche Kraft

$$\vec{F} = (2\pi \cos 2\pi t, 2\pi \sin 2\pi t, -g)m$$

wirkt auf einen Massenpunkt ($m = 1 \text{ kg}$) ein. Berechne die Arbeit, die die Kraft an dem Massenpunkt leistet, wenn sie während des Zeitintervalles $0 \leq t \leq 1 \text{ sec}$ einwirkt. Die Anfangsbedingungen für die Bewegung des Massenpunktes sind:

$$\vec{r} = (-1, 0, 0) \quad \text{und} \quad \vec{v} = (0, -1, 0).$$

7. Zwei Massen $m = 100 \text{ g}$ und $M = 250 \text{ g}$ sind durch ein Seil über eine Rolle verbunden.
 - a) Stelle die Bewegungsgleichungen der Massen auf.
 - b) Berechne die Kräfte, die auf die beiden Massen wirken.
 - c) Zeige, dass aus den Bewegungsgleichungen der Energieerhaltungssatz folgt.
8. In einer Höhe $h = 200 \text{ km}$ über dem Äquator wird ein künstlicher Satellit in horizontaler Richtung ($\phi = 90^\circ$) nach Osten mit einer Geschwindigkeit v_0 (relativ zur Erdoberfläche) gestartet.
 - a) Wie groß muss v_0 gewählt werden, damit der Satellit eine Kreisbahn bzw. eine Parabelbahn durchläuft?

- b) Welche Folge hätte ein Fehler von $\pm 2\%$ im Höhenwinkel ϕ beim Abschuss mit der Kreisbahngeschwindigkeit? Bedenken Sie, dass ein veränderter Höhenwinkel einen veränderten Drehimpuls bedingt.

Hinweis : Benutzen Sie folgende Relationen :

Die numerische Exzentrizität der Satellitenbahn im Zentralkraftfeld der Erde ist, wenn man die reduzierte Masse $\mu = \frac{m_S M_E}{m_S + M_E}$ wegen $M_E \gg m_S$ durch m_S approximiert:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m_S^3 \gamma^2 M_E^2}} = \sqrt{1 + \frac{(R_E + h)^2 v_0^4 \sin^2(\phi)}{\gamma^2 M_E^2} - \frac{2(R_E + h)v_0^2 \sin^2(\phi)}{\gamma M_E}}$$

Dabei ist m_S die Satellitenmasse, M_E die Erdmasse, R_E der Erdradius, E die Energie

$$E = \frac{m_S}{2} v_0^2 - \gamma \frac{m_S M_E}{R_E + h}$$

und L der Drehimpuls

$$L = m_S v_0 (R_E + h) \sin(\phi).$$