

Lösungen - Kapitel 4

1

Im raumfesten Koordinatensystem, in dem sich die Bewegung in x -Richtung abspielt, ist die Geschwindigkeit des Gases

$$v_G = v_R - w.$$

Die Raketenmasse ist

$$M_R(t) = M - m_G(t)$$

die Masse des Gases entsprechend

$$m_G(t) = kt$$

und die Brenndauer der Rakete ist durch

$$\tau := \frac{M - M_0}{k} = 60 \text{ sec}$$

bestimmt. Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Impulserhaltung:

$$\frac{d}{dt}(M_R(t)v_R(t)) + \left(\frac{d}{dt}m_G(t)\right)v_G(t) = 0.$$

Das Negative des zweiten Termes ist die Rückstoßkraft. Beachte, daß die Impulsänderung in diesem Problem durch die Massenänderung verursacht wird. Durch Einsetzen findet man die Bewegungsgleichung

$$(M - kt)\dot{v}_R(t) - kw = 0.$$

Die erste Integration (Variablentrennung) liefert

$$v_R(t) = -w \ln \left(1 - \frac{k}{M}t\right),$$

eine weitere Integration unter Benutzung von

$$\int dy \ln y = y(\ln y - 1)$$

führt auf

$$x_R(t) = \frac{wM}{k} \left(\left(1 - \frac{k}{M}t\right) \ln \left(1 - \frac{k}{M}t\right) + \frac{k}{M}t - 1 \right).$$

Zur Zeit τ ist daher $v_R(\tau) \approx 16,1 \text{ km/sec}$ und $x_R(\tau) \approx 360 \text{ km}$.

2

2

a) Der lineare Impuls ist eine Erhaltungsgröße, also gilt:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}$$

Aus der komponentenweisen Berechnung der Gleichung erhalten wir

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

b) Bei der Betrachtung des realistischeren Stoßproblems reicht die Impulserhaltung allein nicht aus. Da es sich zum einen um ausgedehnte Objekte handelt, muss eine mögliche Rotation des "Kompoundknetkernes" mit berücksichtigt werden. Weiterhin besitzt ein Knetklumpen auch innere Freiheitsgrade, die Energie z.B. bei der Verformung aufnehmen können. Um diese Effekte berücksichtigen zu können, müssen natürlich detailliertere Angaben über die Stoßpartner vorhanden sein.

3

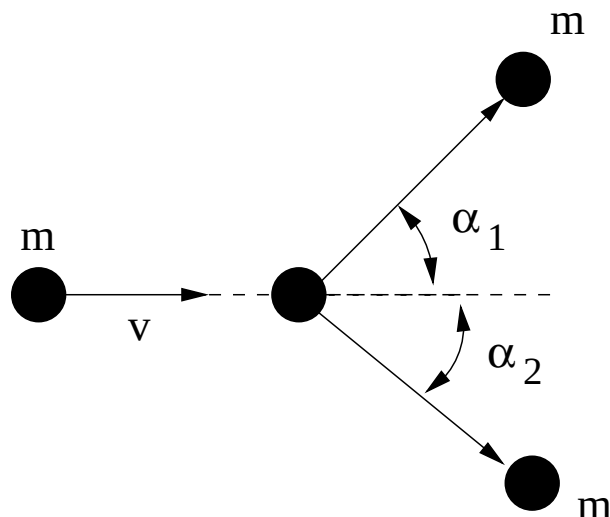
Die Aussage über v'_2 ist nur sinnvoll, wenn der Radikant positiv ist:

$$\frac{v_1^2}{4} - \frac{Q}{m} \geq 0 \rightarrow \frac{1}{2} \left(m \frac{v_1^2}{2} \right) - Q \geq 0 \rightarrow \frac{1}{2} T_1 - Q \geq 0 \rightarrow T_1 \geq 2Q$$

Aus den Erhaltungssätzen folgt also direkt, dass der Energieverlust höchstens die Hälfte der Energie der stoßenden Kugel betragen kann.

4

Es gilt Impulserhaltung in x und y Richtung, wobei x in Strahlrichtung und y senkrecht dazu liegt.



$$0 = mv_1 \sin \alpha_1 + mv_2(-\sin \alpha_2) \quad (y) \quad (1)$$

$$mv = mv_1 \cos \alpha_1 + mv_2 \cos \alpha_2 \quad (x) \quad (2)$$

und natürlich auch Energieerhaltung in einem elastischen Stoß.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3)$$

Alle Gleichungen werden durch die Masse m dividiert. Die Gleichungen (1) und (2) werden quadriert und addiert

$$v_1^2 + v_2^2 + v_1 v_2 \underbrace{(\cos \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_2 \sin \alpha_1)}_{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} = v^2$$

Aus dem Vergleich mit der Energieerhaltung (3) folgt $\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$ und daraus folgt $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$.

5



Es gelten die Erhaltungssätze

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2 \end{aligned}$$

Sie lassen sich in die folgende Form bringen:

$$(v_1 - v'_1) = \frac{m_2}{m_1}(v'_2 - v_2) \quad (1)$$

$$(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = \frac{m_2}{m_1}(v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2) \quad (2)$$

Einsetzen von (1) in (2) liefert

$$(v_1 + v'_1) = (v'_2 + v_2) \quad (3)$$

Aus (1) und (3) erhält man die gesuchten Ausdrücke.

- $m_1 = m_2$: Daraus folgt in beiden Fällen $v'_1 = v_2$, $v'_2 = v_1$. Die beiden Massen tauschen ihre Geschwindigkeiten aus.
- $m_1 \gg m_2$: In diesem Falle folgt $v'_1 = v_1$, $v'_2 = 2v_1 - v_2$. Für $v_1 = 0$ gilt dann $v'_1 = 0$ und $v'_2 = -v_2$. Die kleine Masse wird an der großen reflektiert. Im Falle von $v_1 = -v_2 = v$ folgt daraus $v'_1 = v$ und $v'_2 = 3v$. Die große Masse bewegt sich unbeeinflusst weiter, die kleine mit $3v$ in dieselbe Richtung.

6

Wir benutzen die in Aufgabe 5 hergeleiteten Relationen

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_2 ,$$

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2$$

und bezeichnen die ursprünglich bewegte Kugel mit m_1, v_1 und die erste der beiden ruhenden Kugeln mit $m_2, v_2(=0)$.

Damit folgt :

$$v'_2 = v_1 \quad \text{und} \quad v'_1 = 0.$$

Genauso behandelt man den zweiten Fall ($m_1 = m, m_2 = 2m$) und findet:

$$v'_1 = -\frac{1}{3}v_1 \quad \text{und} \quad v'_2 = -\frac{2}{3}v_1.$$