Lösungen - Kapitel 3

1

$$\begin{aligned} x(t) =& A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ \dot{x}(t) =& -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \\ \ddot{x}(t) =& -\omega_0^2 x(t) \end{aligned}$$

a) Beim Maximalausschlag gilt:

$$\dot{x}(t_1) = 0; \quad \ddot{x}(t_1) < 0.$$

Damit folgt:

$$t_1 = \frac{1}{\omega_0}\arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

Mit $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$, $\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$ ergibt sich durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} x_{\max} =& x(t_1) = \sqrt{A^2+B^2}, \\ \ddot{x}(t_1) =& -\omega_0^2\sqrt{A^2+B^2} \end{aligned}$$

b) Die Maximalgeschwindigkeit bestimmt sich aus der Forderung

$$\ddot{x}(t_2) = 0; \quad [\dddot{x}(t_2) < 0]$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$x(t_2) = 0$$

Daraus ergibt sich:

$$t_2 = \frac{1}{\omega_0}\arctan\left(-\frac{A}{B}\right).$$

Zu dieser Zeit t_2 erreicht der Oszillator seine Maximalgeschwindigkeit

$$\dot{x}_{\max} = \dot{x}(t_2) = \omega_0\sqrt{A^2+B^2} = \omega_0 x_{\max}.$$

c) Die Maximalbeschleunigung setzt

$$\dddot{x}(t_3) = 0; \quad x^{(4)}(t_3) < 0$$

voraus. Nun ist

$$\begin{aligned} \dddot{x}(t) &= -\omega_0^2\dot{x}(t), \\ x^{(4)}(t) &= \omega_0^4 x(t), \end{aligned}$$

so dass man nach Teil a) $t_3 = t_1$ vermuten könnte. Wegen $x(t_1) = x_{max} > 0$ hat $\ddot{x}$ bei t_1 aber ein Minimum. Wir müssen deshalb

$$t_3 = t_1 + \frac{\pi}{\omega_0}$$

annehmen. Es ist dann

$$\begin{aligned} \dddot{x}(t_3) &= -\,\omega_0^2 \dot{x}(t_3) = 0, \\ x^{(4)}(t_3) &= \omega_0^4 x(t_3) = -\omega_0^4 x(t_1) = -\omega_0^4 x_{\max} < 0 \\ \longrightarrow x(t_3) &= -\,x_{\max}; \dot{x}(t_3) = 0; \ddot{x}(t_3) = \omega_0^2 x_{\max} \end{aligned}$$

2

- betrachte (zur Erinnerung) gedämpften, harmon. Oszillator mit äußerer Kraft

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t)$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2m} \quad \omega_0 == \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- zur Ableitung der Stromdifferentialgleichung gehe von Kirchhoffschem Spannungssatz aus

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C} Q = E$$

- Differentiation

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}\dot{Q} = \dot{E}$$

oder, äquivalent dazu (da $I = \dot{Q}$)

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC} I = \frac{1}{L}\dot{E}$$

- die Ladungsdifferentialgleichung folgt aus dem Kirchhoffschen Spannungssatz mit $I = \dot{Q}$:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = \frac{E}{L}$$

- die Spannungsdifferentialgleichung erhält man aus der Ladungsdifferentialgleichung unter Verwendung von $Q = UC$

$$\ddot{U} + \frac{R}{L}\dot{U} + \frac{1}{LC} U = \frac{E}{LC}$$

- im Falle des RLC-Kreises gelten folgende Korrespondenzen zum mechanischen Oszillator

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

- setzt man dies in die Definition $\omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ein, so folgt

$$\omega_1 := \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

- schwache Dämpfung heißt $\beta < \omega_0$ bzw. $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
- im Falle einer konstanten EMK hat man

$$\ddot{I} + 2\beta \dot{I} + \omega_0^2 I = 0$$

- die Lösung dieser Differentialgleichung ist in der Vorlesung im Abschnitt „gedämpfter Oszillator ohne äußere Kraft“ diskutiert worden und lautet

$$I(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$I(t)$ führt also im Falle $R = 0$ eine reine Sinusschwingung mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ aus, im Falle $R > 0$ eine exponentiell abklingende Sinusschwingung mit der Kreisfrequenz $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}} < \omega_0$.

3

Es handelt sich um die Eigenwertaufgabe

$$\ddot{x} + \lambda x = 0 \quad , \quad x(0) = x(1) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{k}{m}.$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_n = n^2 \cdot \pi^2$, die zugehörigen Eigenfunktionen sind $x_n(t) = c_n \sin(n\pi t)$ mit $c_n \neq 0, n = 1, 2, \ldots$. Die Masse genügt immer dann der „1-Sekunde-Forderung “, wenn $\frac{k}{m} = n^2\pi^2$ ist. In diesem Falle wird das Bewegungsgesetz gegeben durch $x_n(t) = \frac{v_0}{n\pi} \sin(n\pi t)$.

$$v_0 = \dot{x}(t = 0) = n\pi c_n \cos(n\pi t) = n\pi c_n \rightarrow c_n = \frac{v_0}{n\pi}$$

4

a) Die Kräfte eindimensionaler Bewegungen $F = F(x)$ besitzen immer ein Potential. Für den harmonischen Oszillator lautet die Kraft $F(x) = -kx$, das Potential ist daher gegeben durch $V(x) = \frac{k}{2}x^2 + c$. Man vereinbart i.a. $V(x = 0) = 0$, setzt also $c = 0$.
Da keine dissipativen Kräfte vorliegen, gilt natürlich der Energieerhaltungssatz :

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = E = const.$$

Das kann man sich auch formal klarmachen, indem man die Zeitableitung des Energiesatzes betrachtet:

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2\right) = \underbrace{(m\ddot{x} + kx)}_{=0}\dot{x} = 0$$

b) Aus dem Energieerhaltungssatz folgt :

$$\dot{x}^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2E}{m} - \omega_0^2 x^2; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Separation der Variablen ($x_{max}^2 = \frac{2E}{k}$):

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega_0^2 x^2}} dx = \frac{1}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2} - x^2}} dx = \frac{1}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{x_{max}^2 - x^2}} dx.$$

Bei $x = x_{\max}$ gilt $\dot{x} = 0$. Damit folgt :

$$\begin{aligned} t - t_1 &= \frac{1}{\omega_0}\int_{x_{max}}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{x_{max}^2 - x'^2}} = \frac{1}{\omega_0}\int_1^{x/x_{max}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \\ &= \frac{1}{\omega_0}\left[\arcsin\left(\frac{x}{x_{max}}\right) - \arcsin 1\right] \\ &\Longrightarrow \arcsin\left(\frac{x}{x_{max}}\right) = \omega_0(t - t_1) + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

x_{max} ist durch t_1 festgelegt und damit kein zusätzlicher freier Parameter :

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2E}{m}}\cos(\omega_0(t - t_1)).$$

c) Die maximale Geschwindigkeit wird beim Nulldurchgang erreicht, $x(t_2) = 0$.

$$t - t_2 = \frac{1}{\omega_0}\int_0^{x/x_{max}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\Longrightarrow x(t) = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2E}{m}}\sin(\omega_0(t - t_2)).$$