Aufgaben - Kapitel 3

1. Diskutieren Sie die allgemeine Lösung

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

des harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\ ,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ .$$

   a) Zu welcher Zeit t_1 erreicht der Oszillator seinen Maximalausschlag x_{max}? Wie groß ist x_{max}? Welchen Wert hat die Beschleunigung zur Zeit t_1?
   Hinweis : $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$, $\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$

   b) Zu welcher Zeit t_2 erreicht der Oszillator seine Maximalgeschwindigkeit $\dot{x}_{max}$? Wie groß ist $\dot{x}_{max}$? Wie groß ist die Auslenkung zur Zeit t_2? Welche einfache Beziehung besteht zwischen x_{max} und $\dot{x}_{max}$?

   c) Zu welcher Zeit t_3 erfährt der Oszillator die maximale Beschleunigung $\ddot{x}_{max}$? Wie groß ist diese? Welche Werte haben Auslenkung und Geschwindigkeit zur Zeit t_3?

2. Machen Sie sich die Analogie zwischen einem gedämpften harmonischen Oszillator mit äußerer Kraft und einem RLC-Kreis (Widerstand R, Induktivität L, Kapazität C) mit elektromotorischer Kraft (EMK) klar. Schreiben Sie sich dazu sowohl die Differentialgleichung des mechanischen Oszillators als auch die Ladungsdifferentialgleichung, Spannungsdifferentialgleichung und Stromdifferentialgleichung des RLC-Kreises auf. Benutzen Sie zur 'Herleitung' der Stromdifferentialgleichung den Kirchhoffschen Spannungssatz

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}Q = E$$

$$\begin{array}{ccl} E & \rightarrow & \text{Spannungsquelle (EMK)} \\ Q & \rightarrow & \text{Ladung} \\ I & \rightarrow & \text{Strom} \end{array}$$

Die Ladungsdifferentialgleichung erhalten Sie aus dem Kirchhoffschen Spannungssatz mit Hilfe der Beziehung

$$I = \dot{Q}.$$

Aus der Ladungsdifferentialgleichung gewinnen Sie mit

$$U = Q/C$$

die Spannungsdifferentialgleichung.
Lösen Sie die Stromdifferentialgleichung für den Fall schwacher Dämpfung $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ und einer konstanten EMK (homogene Differentialgleichung!) Es gelte $R \geq 0$ sowie $L, C > 0$.

3. Betrachten Sie einen ungestörten und ungedämpften harmonischen Oszillator: eine Masse m, die an einer Feder mit der Steifigkeit k befestigt ist. Zur Zeit $t_0 = 0$ wird der in ihrer Gleichgewichtslage ruhenden Masse eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$ erteilt, so dass der Oszillator zu schwingen beginnt. Stellen Sie die Differentialgleichung auf und lösen Sie diese. In welchem Verhältnis muss m zu k stehen, damit die Masse sich 1 Sekunde nach Beginn der Bewegung wieder in der Gleichgewichtslage befindet? Wie lautet in diesem Fall das Bewegungsgesetz des Oszillators?

4. Diskutieren Sie die allgemeine Lösung des harmonischen Oszillators aus der Sicht des Energieerhaltungssatzes.

   a) Warum gilt dieser?

   b) Benutzen Sie den Energieerhaltungssatz zur Berechnung von $x(t)$. Die unabhängigen Parameter sollen dabei die Gesamtenergie E und die Zeit t_1 sein, zu der der Oszillator seinen Maximalausschlag erreicht.

   c) Wählen Sie die Lösung nun so, dass E und t_2 die unabhängigen Parameter sind, wobei t_2 die Zeit ist, zu der der Oszillator seine maximale Geschwindigkeit annimmt.