Mathematische Ergänzung zur

Theoretischen Physik I

Differential und Integralrechnung
Lineare Algebra

JW Goethe – Universität Frankfurt

Hans Jürgen Lüdde

Institut für Theoretische Physik
der J.W. Goethe – Universität

Max-von-Laue-Straße 1
60438 Frankfurt am Main

e-mail: luedde@th.physik.uni-frankfurt.de

Vorwort

In diesem Skript finden Sie die wichtigsten Definitionen und Rechenregeln der Analysis und Vektoralgebra, wie sie in den Vorlesungen zur Theoretischen Physik benötigt werden.

Mit Grundbegriffen, wie Mengenlehre, Zahlensysteme Folgen und Reihen, sowie der Analysis von Funktionen einer reellen Veränderlichen, wird in den beiden ersten Kapitel das mathematische Schulwissen zusammengefasst. Das dritte Kapitel befasst sich mit grundlegenden Rechenoperationen zwischen Vektoren und deren Anwendungen: Geometrie und lineare Abbildungen (lineare Algebra). Die Differential- und Integralrechnung fr Funktionen mehrerer Veränderlicher (Skalar- und Vektorfelder) schließt sich an. Die wichtigsten Begriffe sind im Text in roter Farbe hervorgehoben.

Dieses Skript ersetzt kein Mathematikbuch. Insbesondere Beweise mathematischer Aussagen treten gegenüber praktischen Aspekten – Rechenregeln, wie sie in den theoretischen Naturwissenschaften beötigt werden – zurück.

Frankfurt, Wintersemester 1999/2000

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Zahlen, Folgen, Reihen

In diesem Kapitel werden einige Grundbegriffe der Mathematik erklärt: Dazu gehören unser Zahlensystem und Begriffe wie Folgen und Reihen. Der zweite Abschnitt enthält einen Überblick über Eigenschaften elementarer Funktionen.

1.1.1 Vorbemerkungen

Der Begriff der Menge ist nach Cantor[1] die

....Zusammenfassung bestimmter, wohl unterschiedener Objekte
(Elemente einer Menge) unserer Anschauung oder unseres Denkens
zu einem Ganzen....

Dabei ist durch die Eigenschaften der Objekte eindeutig bestimmt, ob ein Element der Menge $\mathcal{M}$ angehört ($x \in \mathcal{M}$) oder nicht ($x \notin \mathcal{M}$). Zur Charakterisierung einer Menge schreibt man

$$\mathcal{M} = \{x \mid x \quad \text{Eigenschaft}\}$$

und spricht: $\mathcal{M}$ ist die Menge aller x mit der Eigenschaft x ist .... Eigenschaft .... .
Beispiele für Mengen sind

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{n \mid n = 0, 1, \ldots\} \\ \mathcal{R} &= \{x \mid x : \text{reelle Zahl}\} \end{aligned}$$

Endliche Mengen besitzen eine endliche Anzahl von Elementen (die Kardinalzahl) im Gegensatz zu unendlichen Mengen. Man unterscheidet abzählbar unendliche Mengen, wenn die Elemente mit Hilfe der natürlichen Zahlen abzählbar sind, von überabzählbaren Mengen.
Zwei Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

- sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente besitzen

[1] Georg Cantor: ∗ 3.3.1845 in St. Petersburg, † 6.1.1918 in Halle. Mathematiker an der Universität Halle. Hauptwerke: Definition der irrationalen Zahlen, Begründung der Mengenlehre

- sind gleichmächtig, wenn jedem Element aus $\mathcal{A}$ genau ein Element aus $\mathcal{B}$ zugeordnet werden kann
- sind disjunkt, wenn sie kein Element gemeinsam besitzen.

Folgende Relationen lassen sich zwischen Mengen definieren:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \subset \mathcal{B} &= \{x \mid x \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in \mathcal{B}\} && \text{Teilmenge} \\
\mathcal{A} \cap \mathcal{B} &= \{x \mid x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\} && \text{Schnittmenge} \\
\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} &= \{x \mid x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\} && \text{Differenz} \\
\mathcal{A} \cup \mathcal{B} &= \{x \mid x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\} && \text{Vereinigung}
\end{aligned}$$

Die Symbole $\wedge$ und $\vee$ bedeuten 'und' bzw. 'oder'. Konsequenzen obiger Definitionen sind:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \quad &\wedge \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A} \\
\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \quad &= \quad \mathcal{O} \Rightarrow \text{A, B sind disjunkt.}
\end{aligned}$$

Man nennt $\mathcal{O}$ die Nullmenge.
Das kartesische Produkt zweier Mengen ergibt sich aus allen geordneten Paaren der Elemente aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \{x, y \mid x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}\} \ .$$

Beispiel:

$$\mathcal{A} = \{2, 4\} \quad \mathcal{B} = \{1, 3, 5\}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} &= \{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\} \\
\mathcal{B} \otimes \mathcal{A} &= \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\} \ .
\end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass die Reihenfolge der Faktoren des kartesischen Produktes nicht vertauschbar ist.
Eine Abbildung zwischen zwei Mengen ist definiert, indem man den Elementen der Urbildmenge $\mathcal{A}$ Elemente der Bildmenge $\mathcal{B}$ zuordnet. Andere Begriffe für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind Definitionsbereich und Wertebereich der Abbildung.
Eine Abbildung

$$f : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$$

- ist eindeutig (surjektiv), wenn **jedes** Element von $\mathcal{B}$ Bild eines Elementes von $\mathcal{A}$ ist
- ist eineindeutig (injektiv), wenn die Zuordnung zwischen Bild und Urbild in beiden Richtungen eindeutig ist
- heißt bijektiv, wenn die Abbildung injektiv und surjektiv ist, d.h. die Mengen gleichmächtig sind.

1.1.2 Zahlensysteme

Wir haben schon zwei wichtige Mengen kennen gelernt: die natürlichen Zahlen $\mathcal{N}$ und die reellen Zahlen $\mathcal{R}$.

1. $\mathcal{N}$: Natürliche Zahlen
   Die Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist definiert durch die Peano Axiome[2]

   - 0 ist eine natürliche Zahl.
   - Jede natürliche Zahl n hat einen bestimmten Nachfolger n'.
   - Aus $n' = m'$ folgt $n = m$.
   - 0 ist niemals Nachfolger.
   - Jede Menge natürlicher Zahlen, die 0 und mit n auch dessen Nachfolger n' enthält, umfasst alle natürlichen Zahlen.

   Das letzte Axiom wird auch als das Axiom der vollständigen Induktion bezeichnet. Es ist Grundlage eines wichtigen mathematischen Beweisverfahrens.
   Es gibt viele wichtige Beispiele von Teilmengen der natürlichen Zahlen, die in mathematischen Anwendungen von Bedeutung sind.
   Fakultät: das Produkt von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen definiert durch die Rekursion

   $$a_n = n a_{n-1} \ , \quad a_1 = 1$$

   nennt man Fakultät und schreibt

   $$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \ , \quad 0! = 1 .$$

Die ersten acht Fakultäten									
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n!	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320

   Als Anwendung findet man, dass die Anzahl der Permutationen einer Menge von n Elementen gerade $n!$ ist. Z.B. die Menge {1,2,3} bildet die Menge der Permutationen mit 3!=6 Elementen {(123),(312),(231), (321),(132),(213)}. Die ersten 3 Elemente der Permutationsmenge nennt man zyklische (im Uhrzeigersinn lesbar), die anderen antizyklische Vertauschungen der Urbildmenge.
   Doppelfakultät: ist definiert durch die Rekursion

   $$a_n = n a_{n-2} \ , \quad a_1 = 1, a_2 = 2 \ .$$

Die ersten acht Doppelfakultäten									
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n!!	1	1	2	3	8	15	24	105	384

[2] Guiseppe Peano: ∗ 27.8.1858 Cuneo, † 20.4.1932 Turin. Mathematiker an der Universität Turin. Hauptwerke: Mathematische Logik, Grundlagen der Mathematik

Binomialkoeffizienten sind definiert durch

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \ .$$

Sie ergeben sich als die Koeffizienten im binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^n &= \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^{n-m}b^m \ .\end{aligned}$$

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung bilden die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{m}$ die Anzahl der möglichen Kombinationen von m Elementen aus dem Vorrat von n Elementen ohne Wiederholung. Z.B.: Gesucht sind alle Paare der Definitionsmenge {1,2,3,4}. Das Ergebnis bildet die Menge mit den $\binom{4}{2}$=6 Elementen {(12),(13),(14),(23),(24),(34)}.

2. $\mathcal{Z}$: Ganze Zahlen
Die Menge der ganzen Zahlen ist eine Erweiterung der natürlichen Zahlen um negative Werte, d.h.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^- \\ \mathcal{N}^+ &= \mathcal{N} \quad \mathcal{N}^- = \{n \mid |n| \in \mathcal{N} \wedge n < 0\} \ .\end{aligned}$$

Auf der Menge der ganzen Zahlen ist eine Rechenoperation (Addition) definiert, mit den Eigenschaften

Die Gruppenaxiome der Addition		
(A1)	Existenz des neutralen Elementes	a+0 = 0+a = a
(A2)	Existenz des inversen Elementes	a+(-a) = (-a)+a = 0
(A3)	Assoziativität	a+(b+c)= (a+b)+c
(A4)	Kommutativität	a+b = b+a

Die Eigenschaften (A1)-(A3) kennzeichnen eine Gruppe, in diesem Fall für die Addition. Zusammen mit der Eigenschaft (A4) bilden die ganzen Zahlen eine kommutative oder Abel'sche[3] Gruppe bezüglich der Addition.
Bemerkung: Die ganzen Zahlen bilden nicht nur eine Abel'sche Gruppe bezüglich der Addition, sondern darüber hinaus bezüglich der Multiplikation eine Halbgruppe (es fehlt das inverse Element). Zusätzlich gilt das Distributivgesetz: damit bildet die Menge der ganzen Zahlen einen Ring.

[3]Niels Henrik Abel: ∗ 5.8.1802 Findö (Norwegen), † 6.4.1829 Oslo. Mathematiker an der Universität Kristiana (Oslo). Hauptwerke: Theorie der algebraischen Funktionen.

3. $\mathcal{Q}$: Rationale Zahlen
Um die folgende Gleichung
$$xa = b\ , \quad a, b, \in \mathcal{Z}$$
nach der unbekannten Variablen x aufzulösen, muss man beide Seiten der Gleichung durch a dividieren. $x = b/a$ ist aber i.a. kein Element der ganzen Zahlen: wir müssen also unser Zahlensystem erweitern und definieren die rationalen Zahlen
$$\mathcal{Q} = \{x \mid x = \frac{b}{a}; a, b \in \mathcal{Z} \wedge a \neq 0\}\ .$$
Auf dieser Menge können wir eine neue Rechenoperation einführen: die Multiplikation. Man sieht leicht ein, dass die Menge der rationalen Zahlen neben der Addition auch bezüglich der Multiplikation eine kommutative Gruppe bilden ($a, b, \in \mathcal{Q}$)

Die Gruppenaxiome der Multiplikation		
(M1)	Existenz des neutralen Elementes	a 1 = 1 a = a
(M2)	Existenz des inversen Elementes	a (1/a) = (1/a) a = 1
(M3)	Assoziativität	a (b c)= (a b) c
(M4)	Kommutativität	a b = b a

Darüber hinaus gilt das Distributivgesetz (eine Kombination von Addition und Multiplikation)

Distributivgesetz		
(AM1)	Distributivität	a (b+c) = a b + a c

Zahlenmengen, welche die Eigenschaften (A1)-(A4), (M1)-(M4) und (AM1) erfüllen, nennt man Körper. Der Körper der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich, d.h. man findet eine Abbildung von den rationalen Zahlen auf die natürlichen Zahlen.

4. $\mathcal{R}$: Reelle Zahlen
Noch immer reicht das Zahlensystem nicht aus, um die Ergebnisse aller bisher besprochenen Rechenoperationen zu umfassen. Beispiele sind irrationale Zahlen: Quotient aus dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises; Hypotenuse eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks mit Kathetenlänge 1.

Irrationale Zahlen		
π 3.14159265...	e 2.718281828459...	$\sqrt{2}$ 1.414213562...

Die Dezimalstellen von irrationalen Zahlen folgen nicht einer Gesetzmäßigkeit wie z.B. bei rationale Zahlen mit Perioden (1/3= 0.333...; 204/445= 0.41212...). Man benutzt irrationale Zahlen deshalb auch als Pseudozufallszahlen.

Die reellen Zahlen bilden einen Körper und sind überabzählbar. Auf dem reellen Zahlenkörper sind alle folgenden Operationen mit den entsprechenden Inversen definiert: Addition (Subtraktion), Multiplikation (Division), Potenzieren (Radizieren (Wurzel ziehen) aus positiven Radikanden).

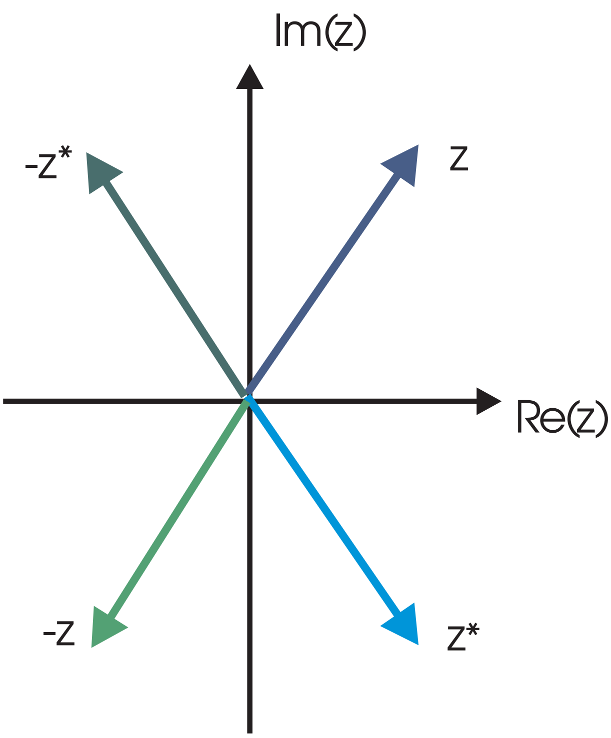
5. $\mathcal{C}$: Komplexe Zahlen
Die letzte Einschränkung erscheint willkürlich. Deshalb erweitern wir das Zahlensystem nochmals, um auch Wurzeln aus negativen Zahlen berechnen zu können. Dazu definiert man die imaginäre Einheit i durch

$$i^2 = -1 \, , \quad i = \sqrt{-1}.$$

Komplexe Zahlen lassen sich auf verschiedene Weisen darstellen. Man definiert sie über ihren Real- und Imaginärteil und schreibt z.B.

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ x = \Re z & \qquad y = \Im z \, . \end{aligned}$$

In einem Koordinatensystem, in dem die Abszisse die Realteile und die Ordinate



Zeigerdiagramm komplexer Zahlen

die Imaginärteile kennzeichnet, lässt sich jede komplexe Zahl als 'Zeiger' darstellen.

Man nennt diese Ebene die komplexe Zahlenebene. Zu jeder komplexen Zahl gibt es eine komplex konjugierte Zahl $z^*(oder \bar{z})$ mit der Eigenschaft

$$z^* = x - iy \ ,$$

nicht zu verwechseln mit

$$\begin{aligned} -z &= -x - iy \\ -z^* &= -x + iy \ . \end{aligned}$$

Der Betrag einer komplexen Zahl entspricht der Zeigerlänge

$$\mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z^* z}.$$

Eine alternative Darstellung erhält man über die trigonometrische Darstellung

$$z = x + iy = \mid z \mid (\cos\phi + i \sin\phi).$$

Man kann diese Darstellung mit Hilfe der Euler'schen Gleichung [4] vereinfachen

$$\begin{aligned} e^{\pm i\phi} &= \cos\phi \pm i \sin\phi \\ z &= \mid z \mid e^{i\phi} \\ z^* &= \mid z \mid e^{-i\phi} \ . \end{aligned}$$

Man nennt den Winkel das Argument der komplexen Zahl mit

$$\tan\phi = \frac{y}{x}.$$

Besonders wichtig für den Umgang mit komplexen Zahlen sind die folgenden Rechenregeln für $z, w \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} z = x + iy & \quad w = u + iv \\ z \pm w &= (x \pm u) + i(y \pm v) \\ z + z^* &= 2\Re z \\ z - z^* &= 2i\Im z \\ iz &= -y + ix \\ zw &= (xu - yv) + i(xv + yu) \\ zz^* &= x^2 + y^2 = \mid z \mid^2 \\ zz &= (x^2 - y^2) + i2xy \\ \frac{z}{w} &= \frac{zw^*}{ww^*} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i\frac{-xv + yu}{u^2 + v^2} \\ z^n &= (\mid z \mid e^{i\phi})^n = \mid z \mid^n e^{in\phi} \\ \sqrt[n]{z} &= z^{1/n} = \mid z \mid^{1/n} e^{i/n\phi} \quad \text{(Hauptwert)} \\ \ln z &= \ln \mid z \mid + i\phi \quad \text{(Hauptwert)}. \end{aligned}$$

[4]Leonard Euler: ∗ 15.4.1707 Basel, † 18.9.1783 St. Petersburg. Studium der Philosophie, Theologie, Mathematik. Professor für Physik und Mathematik in St. Petersburg. Sein Gesamtwerk umfasst 886 Titel in Physik und Mathematik, darunter viele umfangreiche Lehrbücher

Die Division komplexer Zahlen ist etwas 'indirekt'. Man muss zunächst einen reellen Nenner erzeugen durch Erweiterung des Bruches mit dem komplex konjugierten Nenner.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\frac{4+3i}{2-3i} &= \frac{(4+3i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{(8-9)+i(12+6)}{4+9} \\ &= -\frac{1}{13}+i\frac{18}{13}.\end{aligned}$$

Die komplexen Zahlen bilden wie die reellen Zahlen einen Körper. Diese Eigenschaft lässt sich unmittelbar aus den Rechenregeln ablesen.

1.1.3 Folgen und Reihen

Eine Abbildung f von der Menge der natürlichen Zahlen auf eine Bildmenge nennt man eine Folge. In der Regel entspricht die Bildmenge den reellen Zahlen. In diesem Fall nennt man die Abbildung eine reelle Folge oder Zahlenfolge mit der Schreibweise

$$f : \mathcal{N} \mapsto \mathcal{R} \quad f = (a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots) = (a_n).$$

Für jedes Folgenglied gilt

$$a_n = f(n) \quad n \in \mathcal{N}, a_n \in \mathcal{R}.$$

Wenn für **alle** n aus dem Definitionsbereich eine der folgenden Eigenschaften erfüllt ist, so nennt man eine Zahlenfolge:

- positiv für $a_n \geq 0$, negativ für $a_n \leq 0$.
- beschränkt, falls $a_n \leq M$ (obere Schranke), $a_n \geq L$ (untere Schranke).
- monoton, falls $a_n \leq a_{n+1}$ (steigend), $a_n \geq a_{n+1}$ (fallend).
- alternierend, falls $a_n a_{n+1} < 0$.

Eine Zahlenfolge besitzt einen Häufungspunkt bei a, wenn für ein beliebiges $\epsilon > 0$ im Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ unendlich viele Folgenglieder liegen. Jede Folge kann mehrere Häufungspunkte besitzen. Gibt es **genau einen** Häufungspunkt bei a, so nennt man a den Grenzwert von (a_n) und die Folge konvergent oder Cauchy-Folge[5]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

[5] Augustin Louis Cauchy: ∗ 21.8.1789 Paris, † 23.5.1857 Sceaux. Mathematiker an den Universitäten Paris, Turin, Prag. Hauptwerke zur Theorie der Differentialgleichungen und Funktionentheorie

Sonderfälle: ist $a = \infty$, so ist die Folge divergent, ist $a = 0$, so nennt man die Folge eine Nullfolge.
Aus diesen Definitionen leiten sich einige Eigenschaften ab:

$$\begin{aligned}
(a_n) \text{ konvergent } &\Rightarrow (a_n) \text{ beschränkt} \\
(a_n) \text{ beschränkt } &\Rightarrow (a_n) \text{ besitzt mindestens einen Häufungspunkt} \\
& \qquad \text{Satz von Bolzano-Weierstraß} \\
(a_n) \text{ monoton } &\Rightarrow (a_n) \text{ besitzt höchstens einen Häufungspunkt} \\
(a_n) \text{ monoton und beschränkt } &\Rightarrow (a_n) \text{ ist konvergent.}
\end{aligned}$$

Beispiele für wichtige Zahlenfolgen sind:

- arithmetische Folgen: $a_n = a_0 + nq \hookrightarrow (a_n) = (1, 2, 3, 4, \ldots),\ a_0 = 0, q = 1$
- geometrische Folgen: $a_n = a_0 q^n, (q = \frac{a_{n+1}}{a_n}) \hookrightarrow (a_n) = (2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots),\ a_0 = 1, q = 2$
- Fibonacci[6] Zahlen: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, (a_1 = a_2 = 1) \hookrightarrow (a_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$.

Reihen sind Summen von Folgengliedern

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

Eine Reihe ist konvergent, wenn die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

konvergiert. Es gibt einige wichtige Kriterien für die Konvergenz von Reihen:

- das Majorantenkriterium: die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist eine Majorante von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, wenn ab einem Folgenglied k_0 gilt $a_k \leq b_k,\ k \geq k_0$. Ist $\sum b_n$ konvergent, so ist auch $\sum a_n$ konvergent.
- das Minorantenkriterium: die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist eine Minorante von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, wenn ab einem Folgenglied k_0 gilt $a_k \geq b_k,\ k \geq k_0$. Ist $\sum b_n$ divergent, so ist auch $\sum a_n$ divergent.
- das Quotientenkriterium: eine Reihe ist absolut konvergent, wenn es eine Zahl $q < 1$ gibt, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt $\mid \frac{a_{k+1}}{a_k} \mid \leq q$.
- das Leibniz Kriterium:[7] ist (a_n) eine alternierende Folge und $(\mid a_n \mid)$ eine Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ und es gilt $\mid s - s_n \mid \leq \mid a_{n+1} \mid$.

[6]Leonardo Fibonacci: ∗ 1180 Pisa, † 1250 gehörte zum Gelehrtenkreis Friedrichs II. Hauptwerk: Liber Arbaci – Einführung der arabischen Ziffern in Europa

[7]Gottfried Wilhelm Leibniz: ∗ 1.7.1646 Leipzig, † 14.11.1726 Hannover. Studium der Philosophie, der Rechte, der Theologie. Hauptwerke: Differentialrechnung (Calculus 1682), Formalisierung der Mathematik

Beispiele für wichtige Reihen:
Euler Zahl:

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.71828128284590\ldots \end{aligned}$$

Harmonische Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergent}$$

Alternierende harmonische Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots \pm \frac{1}{n} + \ldots = \ln 2 = 0.693147\ldots$$

Inverse Euler Zahl:

$$\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 0.367879441\ldots$$

Die Zahl π:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

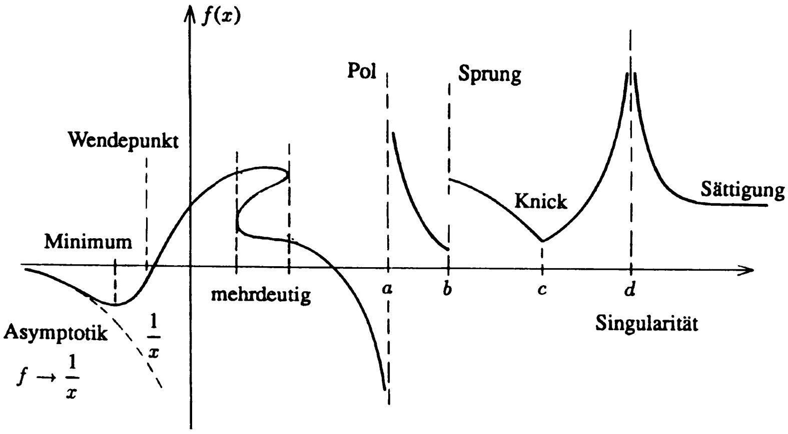
Eine sehr wichtige Eigenschaft im Umgang mit Reihen ergibt sich aus der Kommutativität der Addition: man kann Reihen beliebig umordnen (Umordnungssatz). Und als Konsequenz der Distributivität der reellen Zahlen: das Cauchy Produkt zweier Reihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n'=0}^{\infty} b_{n'} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l}.$$

1.2 Elementare Funktionen einer reellen Veränderlichen

In diesem Kapitel werden wir uns mit den elementaren Funktionen beschäftigen, die ganz wesentlich das quantitative Verständnis der Naturwissenschaften prägen. Funktionen sind i.a. Abbildungen von einer reellen oder komplexwertigen Definitionsmenge auf eine reelle oder komplexwertige Bildmenge. Einige Begriffe lassen sich am Beispiel der nachfolgenden Abbildung anschaulich erläutern:

Die Asymptotik einer Funktion für die Grenzfälle $x \to \pm\infty$. Hier: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (z.B. $1/x$); $\lim_{x\to\infty} f(x) = const$ (z.B. $\arctan x$)
mehrdeutige Funktion (z.B. $\sqrt{x}$)
Polstelle einer Funktion (a) für $x \to x_a$. Hier: $\lim_{x\to x_a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_a^+} f(x) = \infty$ (z.B. $\tan x$)



Eigenschaften von Funktionen (Graphik aus: H.Schulz, Physik mit dem Bleistift; Verlag Harri Deutsch 1999)

Unstetigkeit einer Funktion (b)für $x \to x_b$. Hier: $\lim_{x \to x_b^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_b^+} f(x)$ (z.B. Stufenfunktion $\Theta(x)$)
Knick, Spitze, Cusp einer Funktion (c) für $x \to x_c$. Hier: $\lim_{x \to x_c^-} f'(x) \neq \lim_{x \to x_c^+} f'(x)$ (z.B. $\mid x \mid$) f ist stetig aber nicht differenzierbar.
Singularität einer Funktion (d). Hier: $\lim_{x \to x_d} f(x) = \infty$ (z.B. $1/x^2$)

1.2.1 Grundbegriffe

Darüber hinaus lassen sich noch weitere Funktionsbegriffe definieren. Eine Funktion heißt:

- monoton wachsend, wenn $f(x_1) \leq f(x_2),\ x_2 > x_1$, monoton fallend, wenn $f(x_1) \geq f(x_2),\ x_2 > x_1$, bzw streng monoton, falls keine zwei Funktionswerte übereinstimmen.

  Beispiel: $f(x) = x^2$: streng monoton wachsend für positive x, streng monoton fallend für negative x. Achtung: $f(x)$ ist **nicht** monoton in $(-\infty, \infty)$.

- gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ (z.B. $f(x) = x^{2n}, \cos \alpha x$)
  ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ (z.B. $f(x) = x^{2n+1}, \sin \alpha x$).

- periodisch mit der Periode p, wenn $f(x + p) = f(x)$ (z.B. $\sin x, p = 2\pi$).

- stetig in x_0, wenn ein beliebig kleiner Definitionsbereich um x_0: $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ in einen beliebig kleinen Wertebereich abgebildet wird.

- unstetig in x_0, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Man sagt die Funktion springt in x_0.

- stetig ergänzbar in x_0, wenn in einer Definitionslücke der Grenzwert der Funktion $f(x)$ existiert.

  Beispiel: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist in 0 nicht definiert. Wir zeigen später, dass man $f(x)$ in 0 stetig ergänzen kann durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

- umkehrbar im Definitionsbereich, wenn sie bijektiv ist, also eine eineindeutige Abbildung vorliegt. Dann gilt mit $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$. $f^{-1}(y)$ nennt man Umkehrfunktion oder inverse Funktion zu f. Man erhält sie graphisch durch Spiegelung an $y = x$.

1.2.2 Polynome, Wurzeln

1. Die Polynome sind eine sehr wichtige Funktionenklasse. Sie werden insbesondere in der Quantenmechanik bei der Lösung der Schrödingergleichung abhängig von der physikalischen Situation eine ganze 'Palette' orthogonaler Polynome kennen lernen: die *speziellen Funktionen*.
   Ein Polynom vom Grad n ist definiert als die Funktion

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j.$$

   Es lässt sich zweckmäßig mit Hilfe des Hornerschemas[8] berechnen, z.B.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + a_3 x)).$$

   Jedes Polynom vom Grad n besitzt nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau n Nullstellen, d.h. die Gleichung

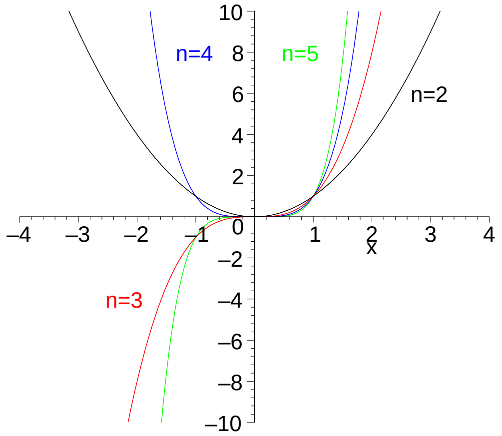
$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = 0$$

   hat n Lösungen x_l. D.h. jedes Polynom lässt sich in Linearfaktoren zerlegen der Form

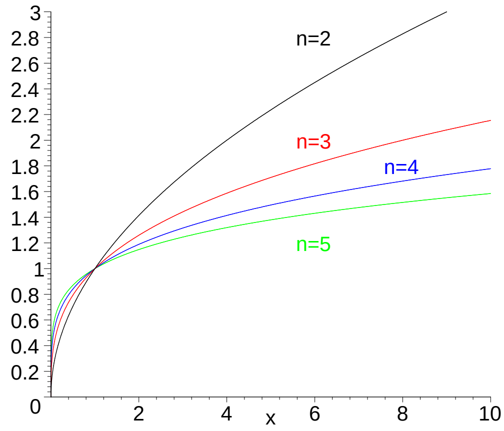
$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_n \prod_{l=1}^{n} (x - x_l).$$

   Die Wurzeln (oder Lösungen) x_l sind reell- oder komplexwertig. Es können auch mehrfache Nullstellen vorkommen (zwei oder mehrere Nullstellen sind identisch).

[8] William George Horner: $*$ 1786, † 1837. Das nach ihm benannte Schema war bereits islamischen Mathematikern seit dem 11. Jahrhundert bekannt



Monome: x^n



Wurzeln: $\sqrt[n]{x}$

Beispiel: Quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind

$$\begin{aligned} &\frac{p^2}{4} - q > 0 && \text{reell und verschieden} \\ &\frac{p^2}{4} - q = 0 && \text{reell und identisch} \\ &\frac{p^2}{4} - q < 0 && \text{komplex und verschieden.} \end{aligned}$$

2. Eine Funktion des Typs
$$f(x) = ax^n$$
nennt man Monom.

3. Die zu den Monomen inversen Funktionen sind die Wurzelfunktionen. Im Definitionsbereich der positiven reellen Zahlen gilt
$$f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$
Damit $x^{\frac{1}{n}}$ eindeutig ist, verständigt man sich immer auf die positive Wurzel.

1.2.3 Rationale Funktionen

1. Funktionen vom Typ
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

nennt man rationale Funktionen, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind. f besitzt die Nullstellen des Polynoms p und hat Definitionslücken in den Nullstellen des Polynoms q. Um herauszufinden, ob eine Definitionslücke hebbar ist, muss man p und q in Linearfaktoren zerlegen. Haben p und q eine oder mehrere Wurzeln gemeinsam, so ist f in diesen Punkten stetig ergänzbar.

Beispiel:

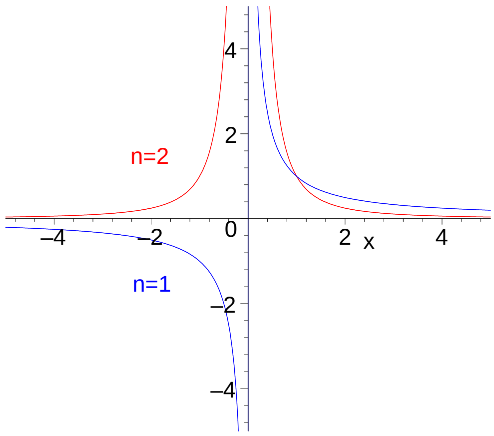
$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \ .$$

Die Funktion besitzt Definitionslücken bei $x = -1, -2, -3$. Offenbar lässt sich die Funktion bei $x = -2$ stetig ergänzen (Zähler- und Nennerpolynom haben die gemeinsame Nullstelle $x = -2$), so dass man folgenden Ausdruck erhält:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x^3+6x^2+11x+6} & x \neq -1, -2, -3 \\ \frac{x-1}{x^2+4x+3} & x = -2 \ . \end{cases}$$

Spezialfälle rationaler Funktionen sind die Hyperbeln

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \ .$$



2. Eine Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion ist immer möglich, wenn der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist, somit f eine echt rationale Funktion ist.

   - Sind die n Linearfaktoren des Nennerpolynoms verschieden, so lässt sich f darstellen als Summe der Partialbrüche

   $$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{(x-x_j)} \ .$$

   - Liegt eine k-fache Wurzel des Nennerpolynoms vor, so ergibt sich für **diesen** Teil der Partialbruchzerlegung

   $$\frac{A_1}{(x-x_0)} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \dots \frac{A_k}{(x-x_0)^k} \ .$$

Beispiel (1):

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} \quad q(x) = x(x-2)(x+3) \; .$$

Ansatz, da alle Wurzeln verschieden sind:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+3} = \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} \\ x+1 &= A_1(x-2)(x+3) + A_2 x(x+3) + A_3 x(x-2) \end{aligned}$$

$$x = 2 \qquad 10A_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad A_2 = \tfrac{3}{10}$$

$$x = -3 \quad 15A_3 = -2 \quad \Rightarrow \quad A_3 = \tfrac{-2}{15}$$

$$x = 0 \qquad -6A_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \tfrac{-1}{6} \; .$$

Beispiel (2):

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-4)^2} \quad x = 4 \text{ ist Doppelwurzel}$$

Ansatz, da beide Wurzeln gleich sind:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A_1}{x-4} + \frac{A_2}{(x-4)^2} \\ x+1 &= A_1(x-4) + A_2 \\ A_1 = 1 & \qquad A_2 = 5 \; . \end{aligned}$$

1.2.4 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen werden i.a. über die Parameterdarstellung des Einheitskreises definiert.
Läuft der Radiusvektor mit wachsendem Winkel, so ändern sich seine x, y Komponenten gerade wie

$$x = \cos\phi \quad y = \sin\phi \; .$$

Man definiert somit die 2π-periodische Funktionen $\sin x, \cos x$ und leitet daraus andere Funktionen ab

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \; .$$

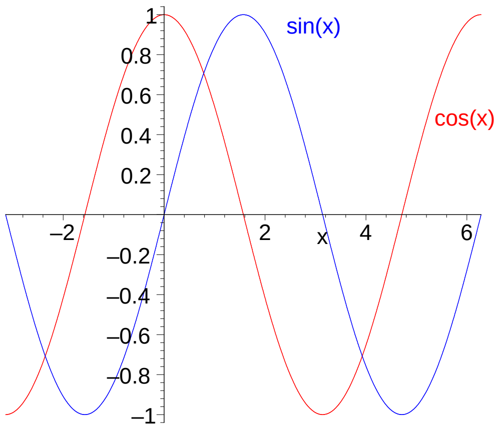
$\tan x$ und $\cot x$ besitzen Polstellen bei halbzahligen Werten von π.
Es gelten die folgenden Eigenschaften:

- $\sin x, \tan x, \cot x$ sind ungerade Funktionen, $\cos x$ ist eine gerade Funktion.
- Es gelten die Additionstheoreme

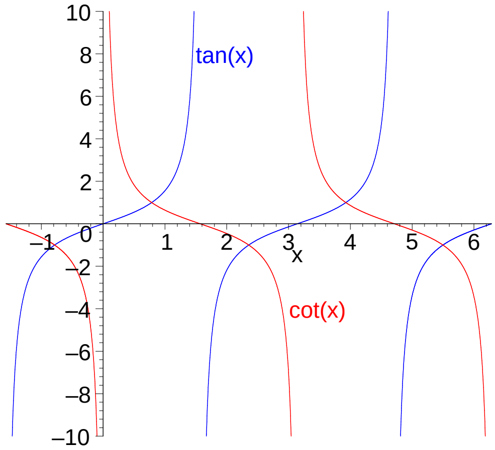
$$\begin{aligned} \sin(x \pm \phi) &= \sin x \cos\phi \pm \cos x \sin\phi \\ \cos(x \pm \phi) &= \cos x \cos\phi \mp \sin x \sin\phi \\ \tan(x \pm \phi) &= \frac{\tan x \pm \tan\phi}{1 \mp \tan x \tan\phi} \; . \end{aligned}$$

- Der Satz von Pythagoras[9]

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \ .$$



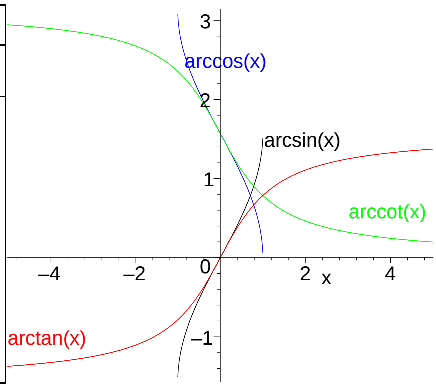
Die Funktionen: $\sin x, \cos x$



Die Funktionen: $\tan x, \cot x$

Die trigonometrischen Funktionen sind i.a. nicht injektiv, da $f(x + 2\pi) = f(x)$. Zur Definition der inversen Funktionen muss man sich auf einen Teil des Definitionsbereiches beschränken.

Zyklometrische Funktionen	
$f(x) : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{B}$	$f^{-1}(x) : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{D}$
$\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto [-1, 1]$	$\arcsin x : [-1, 1] \mapsto [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos x : [0, \pi] \mapsto [-1, 1]$	$\arccos x : [-1, 1] \mapsto [0, \pi]$
$\tan x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \mathcal{R}$	$\arctan x : \mathcal{R} \mapsto [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cot x : [0, \pi] \mapsto \mathcal{R}$	$\mathrm{arccot}\, x : \mathcal{R} \mapsto [\pi, 0]$



1.2.5 Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Exponentialfunktion ist die Lösung der Malthus Gleichung. Sie beschreibt ungebremstes Wachstum einer Population oder den Zerfall instabiler Kerne. Wir können somit die Differentialgleichung

$$f'(x) = f(x)$$

[9]Pythagoras von Samos: ∗ 580, † 496. Griechischer Philosoph und Zahlenmystiker. Der nach Pythagoras benannte Satz war schon vorher in Babylon bekannt

als Definitionsgleichung für die e-Funktion auffassen

$$f:\mathcal{R}\mapsto\mathcal{R}_+\quad f(x)=e^x=\exp x\ .$$

Eigenschaften:

- e^x ist unbeschränkt für $x\to\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$.
- $e^0=1$

Rechenregeln:

- $e^xe^y=e^{x+y}$
- $(e^x)^n=e^{nx}$
- $\frac{1}{e^x}=e^{-x}$

Die Umkehrfunktion zur e-Funktion nennt man natürlicher Logarithmus

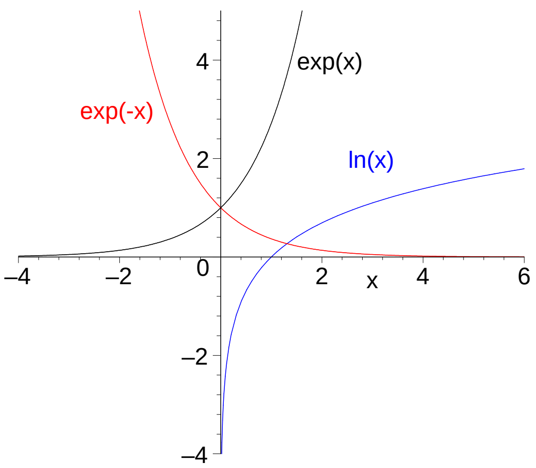
$$f^{-1}:\mathcal{R}_+\mapsto\mathcal{R}\quad f^{-1}(x)=\ln x\ .$$

Eigenschaften:

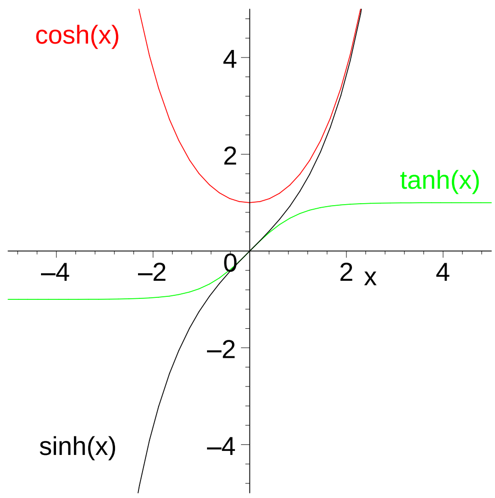
- ln x ist unbeschränkt für $x\to\infty$ und besitzt eine Singularität für x=0.
- $\ln\,1=0$.

Rechenregeln:

- $\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y,\ \ln xy=\ln x+\ln y$.
- $\ln x^n=n\ln x$
- $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$ (Logarithmus zur Basis a)



Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus



Hyperbolische Funktionen

Von der Exponentialfunktion abgeleitet sind die Hyperbelfunktionen mit den folgenden Definitionen

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}x &= \frac{\mathrm{e}^x-e^{-x}}{2} && \text{Sinushyperbolicus}\\ \operatorname{ch}x &= \frac{\mathrm{e}^x+e^{-x}}{2} && \text{Cosinushyperbolicus}\end{aligned}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\mathrm{e}^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{Tangenshyperbolicus}$$

Für die inversen Hyperbelfunktionen gilt eine entsprechende Darstellung nach Logarithmen

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \text{Areasinushyperbolicus} \\
\operatorname{arch} x &= \pm \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad x \geq 1 \\
\operatorname{arth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad |x| < 1 \\
\operatorname{arcth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{x-1} \quad |x| > 1
\end{aligned}$$

Kapitel 2

Analysis von Funktionen einer Veränderlichen

2.1 Differentialrechnung

2.1.1 Zwischenwertsatz

Nachdem Sie nun einige Eigenschaften von Funktionen kennen gelernt haben, werden wir diese intuitiven Kenntnisse verallgemeinern.
Zwischenwertsatz
Sei $f : [a, b]$[1] $\mapsto \mathcal{R}$ eine stetige Funktion, so gilt der Zwischenwertsatz: ist y ein beliebiger Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$, dann gibt es mindestens einen Wert x aus dem Definitionsbereich $[a, b]$ mit $y = f(x)$.
Ein wichtiger Spezialfall des Zwischenwertsatzes kann dazu benutzt werden, die Nullstellen einer Funktion zu finden: gilt für zwei beliebige Werte x, x' aus $[a, b]$ $f(x)f(x') < 0$, so hat f mindestens eine Nullstelle zwischen x und x'.

2.1.2 Die erste Ableitung einer Funktion

Eine stetige Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathcal{R}$ ist differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$, wenn der Grenzwert des Differenzenquotientes existiert

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x}|_{x_0} .$$

Geometrisch stellt $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente $g(x)$ an die Kurve in x_0 dar

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) .$$

[1]Diese abgekürzte Schreibweise bedeutet: f ist eine Funktion, die von der Menge der reellen Zahlen auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ auf die Menge der reellen Zahlen abbildet. Ein kompaktes Intervall enthält die Randwerte. Andere Formen sind: $(a, b]$ halboffenes Intervall enthält b aber nicht a; (a, b) offenes Intervall enthält weder a noch b.

Beispiel: $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\{(x_0+h)^2 - x_0^2\} = \frac{1}{h}(2x_0h+h^2)\\ f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2}{h} = 2x_0\ .\end{aligned}$$

Analog findet man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}|_{x_0} x^n = n x_0^{n-1}\ .$$

Die Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen finden Sie in der nachfolgenden Tabelle:

Die ersten Ableitungen							
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$		
e^x	e^x	a^x	$a^x \ln a$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{th}\, x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathrm{cth}\, x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
$\mathrm{arsh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{arch}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{arth}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}, \lvert x\rvert < 1$	$\mathrm{arcth}\, x$	$-\frac{1}{x^2-1}, \lvert x\rvert > 1$

Ein Beispiel für eine stellenweise nicht differenzierbare Funktion ist $f(x) = |x|$. In x=0 gilt

$$\lim_{h\to 0^-} |x| = -1 \qquad \lim_{h\to 0^+} |x| = 1\ .$$

D.h. der Differenzenquotient in $x = 0$ ist abhängig davon, ob man einen linksseitigen oder rechtsseitigen Grenzprozess durchführt: der Grenzwert existiert nicht.

2.1.3 Ableitungsregeln

Es gibt ein paar einfache Regeln für zusammengesetzte Funktionen. Seien f, u, v differenzierbare Funktionen, dann gilt:

Ableitungsregeln		
$f(x)$	$f'(x)$	Bemerkungen
$ku(x)$	$ku'(x)$	
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$	
$u(x)v(x)$	$u'v+uv'$	Produktregel
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	Quotientenregel
$u(v(x))$	$\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,v}v'$	Kettenregel

Aus diesen Grundregeln lassen sich komplexere Rechenregeln ableiten:

- die Ableitung einer Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \\ \frac{\mathrm{d}\,f^{-1}}{\mathrm{d}\,y} = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} \quad &= \quad \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}} = \frac{1}{f'} \,. \end{aligned}$$

- das Logarithmische Differenzieren. Mit Hilfe der Kettenregel findet man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\ln f(x)) = \frac{\mathrm{d}\ln f}{\mathrm{d}\,f}\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{f}f' = \frac{f'}{f} \,.$$

- das Implizite Differenzieren. Lässt sich eine Funktion $f(xy) = 0$ nicht nach der abhängigen Variablen $y = y(x)$ auflösen, so spricht man von einer implizit gegebenen Funktion. Für die Ableitung gilt dann nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} f_x + f_y y' \quad &= \quad 0 \\ f_x = \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x} \quad & \quad f_y = \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,y} \end{aligned}$$

  Beispiel:

$$f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

  Diese implizite Funktion kann man unter einschränkenden Bedingungen in die explizite Form

$$y = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} & |x| \leq 3, y \geq 0 \\ -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} & |x| \leq 3, y \leq 0 \end{cases}$$

  umschreiben. Die Ableitung erhält man durch Differenzieren nach x

$$\begin{aligned} 8x + 9\frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} \quad &= \quad 0 = 8x + 18yy' \\ y' \quad &= \quad -\frac{4x}{9y} \end{aligned}$$

2.1.4 Ableitungen höherer Ordnung

Ableitungen höherer Ordnungen werden rekursiv definiert. Man sagt, eine Funktion ist zweimal differenzierbar, wenn ihre erste Ableitung differenzierbar ist. Somit schreibt man für die k-te Ableitung

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f^{(k-1)} = \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}\,x^k}\ .$$

Beispiel:
Betrachte die k-te Ableitung des Monoms $y = x^k$

$$\begin{aligned} y' = kx^{(k-1)}, \quad y'' &= k(k-1)x^{(k-2)} \\ y^{(3)} = k(k-1)(k-2)x^{k-3}, \ldots, \ y^{(k)} &= k! \end{aligned}$$

Auf diese Weise können wir jedes Polynom

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j (x - x_0)^j$$

an einer beliebigen Stelle x_0 durch seine Ableitungen charakterisieren,da

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x_0) &= m! c_m \\ c_m &= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\ . \end{aligned}$$

Somit erhält man für das Polynom die äquivalente Form

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j\ . \end{aligned}$$

Wir werden sehen, dass diese Aussage auch für andere Funktionen gilt (siehe Taylorreihen) und somit von außerordentlicher Tragweite ist.
Ebenfalls eine Konsequenz der rekursiven Definition höherer Ableitungen ist die verallgemeinerte Produktregel (Leibniz Regel)

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} f^{(l)}(x) g^{(n-l)}(x)\ .$$

(Beachte die Analogie zum binomischen Lehrsatz!)

n-te Ableitungen	
$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
x^m	$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n},\ m>n$
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\ln a}\frac{1}{x^n}$
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
a^x	$(\ln a)^n a^x$
$\sin kx$	$k^n \sin(kx+\frac{n\pi}{2})$
$\cos kx$	$k^n \cos(kx+\frac{n\pi}{2})$

2.1.5 Mathematische Anwendungen

Ableitungen lassen sich geometrisch als Steigung von Tangenten an einer Funktion interpretieren. Daraus ergeben sich die folgenden Konsequenzen für

1. lokale Eigenschaften von Funktionen:

   - Ist f differenzierbar in $x_0 \in \mathcal{D}$ und $f'(x_0) = 0$, so ist dies die notwendige Bedingung dafür, dass die Funktion an dieser Stelle ein Extremum besitzt. Man sagt die Funktion ist in x_0 stationär, eine wichtige Eigenschaft für die Formulierung physikalischer Prinzipien.
   - Ist f zweimal differenzierbar in $x_0 \in \mathcal{D}$ und gilt $f'(x_0) = 0$, so ist die hinreichende Bedingung dafür, dass $f(x_0)$ ein Maximum (Minimum) ist $f''(x_0) < 0\,(f''(x_0) > 0)$. Man sagt die Funktion ist in x_0 nach rechts (links) gekrümmt.
   - Gilt $f''(x_0) = 0$, so ist die Funktion in x_0 nicht gekrümmt. Man nennt x_0 einen Wendepunkt, wenn gilt

   $$f''(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_0) \neq 0\ .$$

2. Globale Eigenschaften von Funktionen sind z.B.

   - Ist für alle x $f'(x) = 0$, so folgt $f(x) = const.$
   - Ist für alle x $f'(x) > 0$, so folgt $f(x)$ ist streng monoton wachsend. Ist für alle x $f'(x) < 0$, so folgt $f(x)$ ist streng monoton fallend.

3. Unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}, 0\infty, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ lassen sich mit Hilfe der Regel von l'Hospital[2] analysieren. Sei $f(x) = u(x)/v(x)$ unbestimmt in x_0, u und v aber

[2] Guillaume L'Hospital: $*$ 1661 Paris, † 2.2.1704 Paris. Erstes Lehrbuch der Infinitesimalrechnung 1696

m- fach differenzierbar in x_0. Existiert der Grenzwert

$$g = \lim_{x \to x_0} \frac{u^{(k)}(x)}{v^{(k)}(x)} \quad \text{für ein } k < m \ ,$$

so gilt $f(x_0) = g$.

Beispiel (1):

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \hookrightarrow \quad f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \ .$$

Beispiel (2):

$$f(x) = x \ln x \quad \hookrightarrow \quad f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x \to 0} x = 0 \ .$$

2.2 Taylorreihen, Funktionenreihen

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie man jede beliebig oft differenzierbare Funktion in Form einer Potenzreihe entwickeln kann. Diese Taylorreihen sind eine spezielle Form der Darstellung von Funktionen (Funktionenreihen) und ein sehr wichtiges Hilfsmittel zur Analyse komplizierter Funktionen.
Zur Vorbereitung betrachten wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

- Ist f in $[a, b]$ stetig und differenzierbar, dann gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in [a, b]$ mit
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

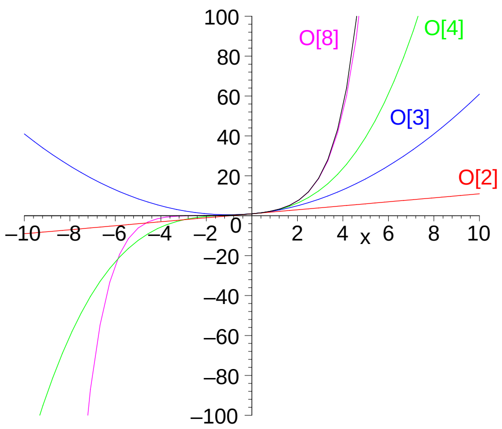
Ganz allgemein können wir somit jede Funktion um einen Punkt x_0 linearisieren:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi(x))(x - x_0) \quad x > x_0, \xi \in [x_0, x] \ .$$

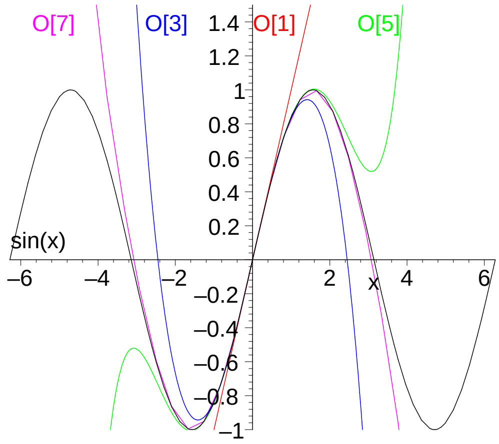
Das Problem ist natürlich, dass wir die Stelle ξ nicht kennen. Die Verallgemeinerung ist der Satz von Taylor[3] (1715):

- Ist f in $[a, b]$ $(m + 1)$-mal differenzierbar, so kann man f um $x_0 \in (a, b)$ durch ein Polynom m-ten Grades darstellen
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + R_m(x)$$
mit dem Restglied
$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{qm!}(x - \xi)^{(m+1-q)}(x - x_0)^q \quad \xi \in [a, b], q \in \mathcal{N}, q \leq m + 1 \ .$$

[3] Brook Taylor: ∗ 18.8.1685 Edmonton, † 29.12.1731 London. Beruf: Jurist



Taylorentwicklung von exp(x) bis zur Ordnung O[n]



Taylorentwicklung von sin(x) bis zur Ordnung O[n]

Beispiele für Restglieder sind[4]

$$R_m(x) = \begin{cases} \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)^{(m+1)} & q = m+1 \quad \text{Lagrange's Restglied} \\ \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m(x-x_0) & q = 1 \quad \text{Cauchy's Restglied} \end{cases}$$

Ist darüber hinaus f(x) beliebig oft differenzierbar und gilt

$$\lim_{m\to\infty} R_m(x) = 0 \; ,$$

kann man f als Potenzreihe um einen Entwicklungspunkt x_0 schreiben (Taylorreihe)

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m \; .$$

Spezialformen ergeben sich für $x_0 = 0$ (McLaurin Reihe[5]), wobei der Konvergenzbereich über die Bedingung, dass das Restglied verschwinden muss, festgelegt wird.

[4]Joseph Louis Lagrange: ∗ 25.1.1736 Turin, † 10.4.1813 Paris. Professor für Physik und Mathematik an den Universitäten Turin, Berlin, Paris. U.a. Arbeiten zur Variationslrechnung und dem Dreikörperproblem. Hauptwerk: Mecanique analytique (1788)

[5]Colin McLaurin: ∗ 1698 Kilmoddan (Schottland), † 14.6.1746 York. Professuren in Aberdeen und Edinburgh; Schüler von Newton

Potenzreihenentwicklung		
$f(x)$		Konvergenzbereich
$(1 \pm x)^{-m}$	$1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \ldots + (\pm 1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}x^n \ldots$	$\|x\| < 1$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \pm \ldots$	$\|x\| < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \ldots$	$\|x\| < \infty$
e^x	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	$\|x\| < \infty$
$\ln x$	$2\{\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \ldots + \frac{(x-1)^{(2n+1)}}{(2n+1)(x+1)^{(2n+1)}} + \ldots\}$	$x > 0$

Die Taylorreihe ist ein Beispiel für die Entwicklung von Funktionen in Funktionenreihen. Sie werden vor allem im Rahmen der Quantenmechanik den Begriff des 'vollständigen Funktionensystems' kennen lernen. Jede Funktion kann nach einem vollständigen Funktionensystem entwickelt werden: z.B. wie hier nach Monomen. Ein anderes Beispiel ist die Entwicklung von Funktionen nach trigonometrischen Funktionen (harmonische Analyse oder Fourierreihen).[6] Eine Funktion lässt sich dann schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j \sin(j\omega x) + b_j \cos(j\omega x)) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \exp(ij\omega x) \ . \end{aligned}$$

Die Koeffizienten (z.B. c_j)

$$c_j(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ij\omega x) \, dx$$

nennt man die Fouriertransformierte von f.

2.3 Integralrechnung

Die Integralrechnung kann man als Umkehroperation der Differentialrechnung auffassen, d.h.

Gegeben ist eine Funktion $f : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{R}$.
Gesucht ist deren Stammfunktion
$F : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{R}$ mit $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f$.

[6]Jean Baptiste Joseph Fourier: $*$ 21.3.1768 Auxerre, † 16.5.1830 Paris. Mathematiker und Politiker unter Napoleon. Professuren in Paris und Kairo. Hauptwerk: Theorie analytique de la chaleur (1822) (Wärmeausbreitung mit Hilfe von Fourierreihen)

Man schreibt die Stammfunktion

$$F(x) = \int^{x} f(x')\, \mathrm{d}\, x'$$

als unbestimmtes Integral und sagt f ist integrierbar, wenn F existiert.

2.3.1 Unbestimmte Integrale

Aus der Definition wird sofort klar, dass die Stammfunktion F einer Funktion f nicht eindeutig ist, sondern nur bis auf eine Konstante bestimmt werden kann

$$\tilde{F} = F + C \quad \hookrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,\tilde{F}}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,x} = f\ .$$

Grundintegrale sind (vergleiche auch die Tabelle der ersten Ableitungen)

Grundintegrale			
$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$

2.3.2 Integrationsregeln

Da Integrieren die Umkehroperation des Differenzierens ist, findet man die entsprechenden Grundregeln wieder (Partielle Integration versus Produktregel; Substitutionsregel versus Kettenregel):

Integrationsregeln		
$f(x)$	$F(x)$	Bemerkungen
$ku(x)$	$k\int u(x)\ \mathrm{d}\,x$	
$u(x)+v(x)$	$\int u(x)\ \mathrm{d}\,x + \int v(x)\ \mathrm{d}\,x$	
$u'(x)v(x)$	$u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\ \mathrm{d}\,x$	Partielle Integration
$u(v(x))v'(x)$	$\int u(v)\ \mathrm{d}\,v$	Substitutionsregel

Beispiel (1) zur Substitutionsregel:

$$\begin{aligned}
F &= \int \sqrt{a^2-x^2}\ \mathrm{d}\,x \\
\text{Substitution: } x &= a\sin t \\
\mathrm{d}\,x &= a\cos t\ \mathrm{d}\,t \\
F = \int \sqrt{a^2-x^2}\ \mathrm{d}\,x &= a^2 \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\ \mathrm{d}\,t = a^2 \int \cos^2 t\ \mathrm{d}\,t \\
&= \frac{a^2}{2}(\sin t\cos t + t) \\
\text{Rücksubstitution: } x &= a\sin t\ ;\ \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t\ ;\ t = \arcsin\frac{x}{a} \\
F &= \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}) + C\ .
\end{aligned}$$

Beispiel (2) zur partiellen Integration:

$$\begin{aligned}
F &= \int x\sin x\ \mathrm{d}\,x \\
\text{setze: } u' &= \sin x\ ,\ v = x \\
F = \int x\sin x\ \mathrm{d}\,x &= -x\cos x + \int \cos x\ \mathrm{d}\,x \\
&= -x\cos x + \sin x + C\ .
\end{aligned}$$

Um die Stammfunktionen zusammengesetzter Integranden zu finden, muss man sich verschiedener Techniken bedienen. Oft helfen nur Übung und Intuition, z.B. die richtige Substitution für einen Integranden zu finden. Es gibt jedoch einige generelle Regeln, an denen man sich orientieren sollte.

1. Rationale Integranden
   Integrale über rationale Funktionen lassen sich in der Regel mit Hilfe der Partialbruchzerlegung lösen.

   Beispiel:

$$\begin{aligned}
F = \int \frac{x+1}{x^3+x^2-bx}\ \mathrm{d}\,x &= \int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}\ \mathrm{d}\,x \\
\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} \\
x+1 &= A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2) \\
\hookrightarrow \quad F &= -\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x} + \frac{3}{10}\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x-2} - \frac{2}{15}\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x+3} \\
&= -\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + C\ .
\end{aligned}$$

2. Irrationale Integranden
   Irrationale Funktionen (Wurzelfunktionen) können mit Hilfe einer der folgenden Substitutionen integriert werden

Substitutionen für Wurzelausdrücke	
$\int f(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\ \mathrm{d}\,x$	$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\ \mathrm{d}\,x$	lässt sich auf eine der folgenden Formen transformieren
$\int f(x, \sqrt{x^2+a^2})\ \mathrm{d}\,x$	$x = a\,\mathrm{sh}\,t$
$\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})\ \mathrm{d}\,x$	$x = a\,\mathrm{ch}\,t$
$\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})\ \mathrm{d}\,x$	$x = a\sin t$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
F &= \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{3x^2+2x-1}} \\
\text{1. Substitution: } x &= \frac{1}{z} \quad \mathrm{d}\,x = -\frac{1}{z^2}\ \mathrm{d}\,z \\
F = -\int \frac{\frac{1}{z^2}\ \mathrm{d}\,z}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{3}{z^2}+\frac{2}{z}-1}} &= -\int \frac{\mathrm{d}\,z}{\sqrt{3+2z-z^2}} \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}\,z}{\sqrt{4-(z-1)^2}} \\
\text{2. Substitution: } z-1 &= 2\sin t\ ,\ \mathrm{d}\,z = 2\cos t\ \mathrm{d}\,t \\
F &= -\int \frac{2\cos t\ \mathrm{d}\,t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = -\int \mathrm{d}\,t = -t \\
\text{Rücksubstitutionen: } F &= -t = -\arcsin\frac{z-1}{2} \\
&= -\arcsin\frac{1-x}{2x}\ .
\end{aligned}$$

3. Trigonometrische Integranden
   Integrale über trigonometrische Funktionen lassen sich mit Hilfe einer der folgenden Substitutionen lösen

Substitutionen für trigonometrische Integranden	
$\int f(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}\,x$	$t = \tan\frac{x}{2}$
$\int f(\sin x)\cos x\ \mathrm{d}\,x$	$t = \sin x$
$\int f(\cos x)\sin x\ \mathrm{d}\,x$	$t = \cos x$

Beispiel:

$$F = \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\ \mathrm{d}\,x$$

$$\begin{aligned}
\text{Substitution: } t &= \tan\frac{x}{2} \quad \mathrm{d}\,x = \frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}\,t \\
F = \int \frac{(1+\frac{2t}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}\,t}{\frac{2t}{1+t^2}(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})} &= \int \frac{2(t+1)^2}{4t}\ \mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{2}(\int t\ \mathrm{d}\,t + 2\int\ \mathrm{d}\,t + \int \frac{1}{t}\ \mathrm{d}\,t) \\
&= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}|\ .
\end{aligned}$$

2.3.3 Bestimmte Integrale

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ergibt sich für die Differenz der Stammfunktion an verschiedenen Stellen des Definitionsbereiches der Zahlenwert

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x = F(x)|_a^b\ .$$

Man nennt diese Differenz ein bestimmtes Integral (Riemann Integral).[7] Graphisch repräsentiert das bestimmte Integral den Flächeninhalt zwischen der Funktion f und der Abszisse. Flächen oberhalb (unterhalb) der Abszisse sind positiv (negativ). Darüber hinaus folgt aus der Definition

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}\,x\ .$$

Alle Rechenregeln für unbestimmte Integrale sind übertragbar.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2\sqrt{4-x^2}} \\
\text{1. Substitution: } x &= \frac{2}{t} \quad \mathrm{d}\,x = -\frac{2}{t^2}\ \mathrm{d}\,t \\
I = -\frac{1}{4}\int_{t(x=1)}^{t(x=2)} \frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} &= -\frac{1}{4}\int_2^1 \frac{t\ \mathrm{d}\,t}{\sqrt{t^2-1}} \\
\text{2. Substitution: } t &= \operatorname{ch} z \quad \mathrm{d}\,t = \operatorname{sh} z\ \mathrm{d}\,z \\
I = -\frac{1}{4}\int_{z(t=2)}^{z(t=1)} \frac{\operatorname{ch} z \operatorname{sh} z\ \mathrm{d}\,z}{\operatorname{sh} z} &= -\frac{1}{4}\operatorname{sh} z|_{\ln(2-\sqrt{3})}^{0} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\ .
\end{aligned}$$

Analog zur Differentialrechnung gilt der Mittelwertsatz der Integralrechnung:

[7] Bernhard Riemann: ∗ 17.9.1826 Breselenz, † 20.7.1866 Selasca (Lago Maggiore). Studium der Philologie, Theologie und Mathematik. Grundlegende Arbeiten zur Differentialgeometrie, konforme Abbildungen, Analysis (Riemannintegral) und Zahlentheorie

- Sind f stetig und g integrierbar und positiv im Integrationsbereich $[a,b]$, so existiert eine Zahl $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}\,x = f(\xi)\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}\,x\ .$$

  Insbesondere gilt für $g(x) = 1$

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x = f(\xi)(b-a)\ .$$

2.3.4 Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale sind Integrale, für die

- das Integrationsintervall nicht beschränkt ist. Das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}\,x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x$$

  existiert, wenn der Integrand für $x \to \infty$ ausreichend schnell abfällt.

  Beispiele:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x} &= \lim_{b\to\infty} \ln x|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty \\
\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x^{\alpha+1}} &= \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{\alpha x^\alpha}|_1^b) \\
&= -\frac{1}{\alpha}\lim_{b\to\infty}(\frac{1}{b^\alpha}-1) = \frac{1}{\alpha} \quad \alpha > 0\ .
\end{aligned}$$

- der Integrand Polstellen im Integrationsintervall besitzt. Hat z.B. f eine Polstelle bei c, so existiert das Integral

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}\,x = \lim_{\epsilon\to 0}\{\int_a^{c-\epsilon} f(x)\ \mathrm{d}\,x + \int_{c+\epsilon}^b f(x)\ \mathrm{d}\,x\}\ ,$$

  wenn f in einer Umgebung um c nicht zu schnell anwächst.

  Beispiele:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}} &= \lim_{\epsilon\to 0} 2\sqrt{x}|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0}(2-2\sqrt{\epsilon}) = 2 \\
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x} &= \lim_{\epsilon\to 0} \ln x|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0}(0-\ln\epsilon) = -\infty \\
\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x} &= \lim_{\epsilon\to 0}\{\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{x}\,dx + \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}\,x\} \\
\text{Substitution: } t &= -x \quad \mathrm{d}\,x = -\,\mathrm{d}\,t \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\{\int_1^\epsilon \frac{1}{x}\ \mathrm{d}\,x + \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}\,x\} = 0
\end{aligned}$$

Kapitel 3

Funktionen mehrerer Veränderlicher

In der Physik beschreibt man, wenn auch idealisiert, Phänomene der realen Umwelt. Das sind Vorgänge, die in der Regel in einem dreidimensionalen Raum beobachtet werden, z.B. charakterisiert durch Zahlenwerte, die sich von Raumpunkt zu Raumpunkt verändern können oder auch durch Größen, die zusätzlich eine Richtung angeben. In jedem Fall muss man solche Größen als Funktionen mehrerer Variablen (Raumkoordinaten) auffassen und man muss sich überlegen, wie man die Begriffe der Analysis einer Variablen auf solche Funktionen übertragen kann.

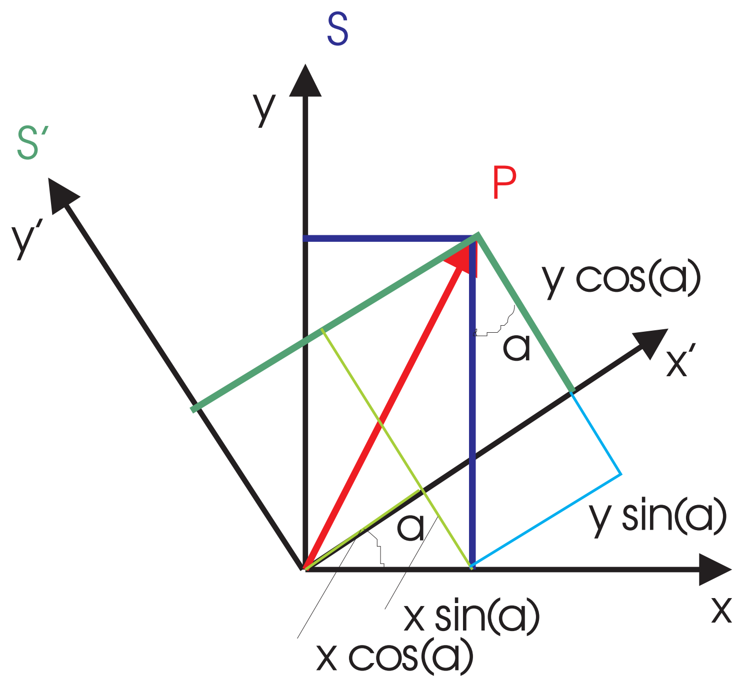
3.1 Vektoralgebra

Motiviert durch die Erfahrung unterscheidet man

- Skalare: Größen, die durch die Angabe einer Zahl definiert sind (z.B.: Temperatur, Dichte, Druck, Arbeit, ...)
- Vektoren: Größen, die durch die Angabe einer Zahl und einer Richtung gekennzeichnet sind (z.B.: Ort, Impuls, Kraft, ...)
- Tensoren: Größen, die in verschiedenen Raumrichtungen durch unterschiedliche Zahlen charakterisiert werden (z.B.: Materialeigenschaften (mechanische (Spannung in einem Körper), elektrische (Leitfähigkeit), magnetische (Suszeptibilität)), Trägheit eines starren Körpers oder die Metrik der Raumzeit sind Tensoren zweiter Stufe, die durch symmetrische Matrizen dargestellt werden können.)

3.1.1 Skalare, Vektoren, Tensoren

Natürlich ist nicht jede Matrix ein Tensor. Wir benötigen daher eine etwas genauere Definition der Begriffe Skalare, Vektoren, Tensoren.
Dazu betrachten wir das Verhalten von Skalaren und Vektoren unter Koordinatentransformationen am Beispiel einer Drehung im zweidimensionalen Raum. Ein Vektor besitzt im Koordinatensystem S die Komponenten (x, y). Damit sind die Richtung und der Betrag $\sqrt{x^2 + y^2}$ festgelegt. Im Koordinatensystem S' besitzt der selbe Vektor die Komponenten



Zum Verhalten von Vektoren unter Drehungen

(x', y'). Der Zusammenhang ist

$$\begin{aligned} x' &= x \cos a + y \sin a \\ y' &= -x \sin a + y \cos a \ , \end{aligned}$$

oder allgemeiner formuliert $(x_1 = x, x_2 = y)$

$$x'_j = \sum_{i=1}^{2} d_{ji} x_i \quad j = 1, 2$$

$$d_{11} = \cos a \qquad d_{12} = \sin a$$

$$d_{21} = -\sin a \qquad d_{22} = \cos a \ .$$

Damit erhalten wir als mathematische Definition:

- Skalare sind Größen, die invariant gegenüber Koordinatentransformationen sind (die Raumtemperatur an einer bestimmten Stelle im Raum ist unabhängig vom Koordinatensystem).

- Vektoren sind Zahlentripel (n-Tupel), die sich auf ein Koordinatensystem beziehen und sich bei Koordinatentransformation wie eine gerichtete Strecke transformieren, also

  $$v'_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ji} v_i \quad j = 1, \ldots, n \ .$$

  v_i, v'_i sind die Komponenten des Vektors $\vec{v}$ in S oder S'.

- Tensoren zweiter Stufe sind $(n \times n)$ Matrizen, die sich unter Koordinatentransformationen sowohl bezüglich der Zeilen als auch bezüglich ihrer Spalten wie Vektoren transformieren

$$t'_{j_1 j_2} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} d_{j_1 i_1} d_{j_2 i_2} t_{i_1 i_2} \quad j_1, j_2 = 1, \ldots, n \,.$$

Bemerkungen:
(i) Skalare und Vektoren sind spezielle Tensoren. Skalare: Tensoren nullter Stufe; Vektoren: Tensoren erster Stufe.
(ii) Man schreibt einen Vektor $\vec{v}$ als Liste seiner kartesischen Komponenten

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

(hier im dreidimensionalen Raum) bezogen auf ein Koordinatensystem.
(iii) Spezielle Vektoren sind der Nullvektor

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der Einheitsvektoren mit $|\vec{e}| = 1$ (Betrag des Vektors $\vec{e}$). Z.B. definieren die kanonischen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein kartesisches Koordinatensystem. Sie sind zueinander orthogonal (senkrecht) und bilden ein Rechtssystem.

3.1.2 Rechenregeln für Vektoren

Vektoren lassen sich addieren und mit Skalaren multiplizieren. Es gelten die folgenden Rechenregeln

Eigenschaften eines Vektorraumes			
Addition		**Skalarmultiplikation**	
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$	neutrales Element	$1\vec{a} = \vec{a}1 = \vec{a}$	
$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$	inverses Element	$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$	
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$	Assoziativität	$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$	Distributiv-
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	Kommutativität	$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$	gesetze

Eine Menge $\mathcal{V}$ heißt Vektorraum über dem Körper $\mathcal{K}$, wenn ihre Elemente unter der Addition eine Abel'sche Gruppe bilden und eine Skalarmultiplikation mit den Körperelementen

definiert ist.
Beispiel:
(i) $\mathcal{R}^3$ über $\mathcal{R}$ ist der dreidimensionale Vektorraum über dem reellen Zahlenkörper. Er entspricht unserer Erfahrungswelt der makroskopischen Physik.
(ii) $\mathcal{H}$ über $\mathcal{C}$ heißt Hilbertraum.[1] Er ist ein unendlich dimensionaler Vektorraum über dem komplexen Zahlenkörper, der eine Beschreibung mikroskopischer Prozesse erlaubt (Quantenphysik).
Vektoren nennt man linear abhängig, wenn sie durch eine Linearkombination der jeweils anderen Vektoren darstellbar sind.
Beispiel: Seien

$$\begin{aligned} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} &\in \mathcal{R}^3;\ \lambda, \mu \in \mathcal{R} \\ \vec{a} &= \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}\,, \end{aligned}$$

so gilt für die anderen Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \frac{1}{\lambda}\vec{a} - \frac{\mu}{\lambda}\vec{c} \\ \vec{c} &= \frac{1}{\mu}\vec{a} - \frac{\lambda}{\mu}\vec{b} \end{aligned}$$

Vektoren nennt man linear unabhängig, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

Als Basis eines Vektorraumes $\mathcal{R}^n$ bezeichnet man einen beliebigen Satz von n linear unabhängigen Vektoren. Jedes Element des Vektorraumes lässt sich dann als Linearkombination dieser Basis beschreiben.
Beispiel: die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 \equiv \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 \equiv \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind eine Basis des $\mathcal{R}^3$. Ist $\vec{a} \in \mathcal{R}^3$, so gilt

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad .$$

Neben der Skalarmultiplikation gibt es auch multiplikative Verknüpfungen zwischen Vektoren.

[1]David Hilbert: ∗ 23.1.1862 Königsberg, † 14.2.1943 Göttingen. Professuren in Königsberg und Göttingen. Grundlegende Beiträge zur Zahlentheorie, Geometrie, Integralgleichungen, Variationsrechnung. H. galt als der bedeutendste Mathematiker seiner Zeit.

Skalarprodukt (inneres Produkt)

Unter einem Skalarprodukt zweier Vektoren versteht man das Körperelement

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) \ .$$

Für eine Darstellung nach kartesischen Komponenten gilt

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{e}_i \sum_{k=1}^{n} b_k\vec{e}_k = \sum_{i,k=1}^{n} a_i b_k \vec{e}_i\cdot\vec{e}_k \\
\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k &= \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \equiv \delta_{ik} \\
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ .
\end{aligned}$$

Beispiele:
(a) Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$
(b) Einheitsvektor (Richtungsvektor) in Richtung von $\vec{a}$:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \ .$$

(c) Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \ .$$

Insbesondere gilt für zwei Vektoren, die keine Nullvektoren sind, dass sie orthogonal (zueinander senkrecht) sind, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet.
(d) Satz von Pythagoras: Sei $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
c^2 &= \vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \\
&= a^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + b^2 \\
&= a^2 + b^2 \ .
\end{aligned}$$

(e) Projektion auf kartesische Basis:

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_j = a_j \ .$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln für Skalarprodukte:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \vec{b}\cdot\vec{a} \\
(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} &= \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) \\
(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} &= \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c} \ .
\end{aligned}$$

Achtung: das Skalarprodukt ist **nicht** assoziativ, d.h.

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} \neq \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) \ .$$

Vektorprodukt (äußeres Produkt)

Unter einem Vektorprodukt zweier Vektoren versteht man den Vektor

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{c} \\ |\vec{c}| &= |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) \, , \end{aligned}$$

der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht und in der Reihenfolge $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechtssystem bildet. Im dreidimensionalen Raum entspricht der Betrag des Vektorproduktes dem Flächeninhalt des von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \, . \end{aligned}$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln für Vektorprodukte:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\ (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} &= \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) \\ (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \, . \end{aligned}$$

Mehrfachprodukte:

- Spatprodukt: Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \, . \end{aligned}$$

- Dreifaches Vektorprodukt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ &\neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \, . \end{aligned}$$

3.1.3 Geometrie

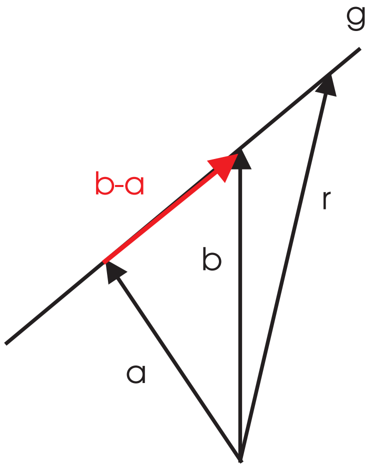
1. Geraden

   Eine Gerade ist durch zwei Punkte bestimmt. Entsprechend erreicht man jeden Punkt $\vec{r}$ der Geraden g durch

   $$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \, .$$

   Zwei Geraden g_1, g_2 schneiden sich, wenn sie mindestens einen Punkt gemeinsam haben

   $$\vec{a}_1 + \lambda_1(\vec{b}_1 - \vec{a}_1) = \vec{a}_2 + \lambda_2(\vec{b}_2 - \vec{a}_2) \, .$$



Konstruktion von Geraden durch Vektoren

Daraus erhält man λ_1, λ_2 für den Schnittpunkt.
Der Schnittwinkel zwischen zwei Geraden ergibt sich aus dem Skalarprodukt

$$\frac{(\vec{b}_1 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{b}_2 - \vec{a}_2)}{|\vec{b}_1 - \vec{a}_1||\vec{b}_2 - \vec{a}_2|} = \cos\gamma \; .$$

Zwei Geraden heißen windschief, wenn sie sich nicht schneiden und nicht parallel sind.

2. Dreiecke
   Folgende Aussagen gelten für beliebige Dreiecke:

   - Verallgemeinerter Satz von Pythagoras (Cosinussatz)

   $$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} - \vec{b} \\ c^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \; . \end{aligned}$$

   - Dreicksungleichung

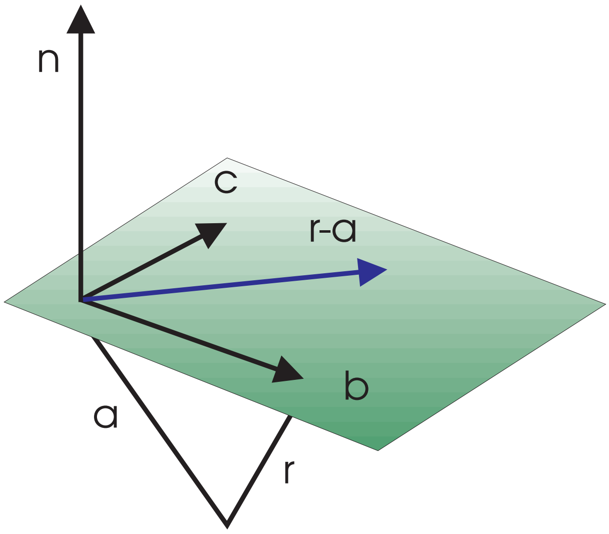
   $$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad \rightarrow \quad |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \; .$$

   - Schwarz'sche[2] Ungleichung

   $$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| |\cos(\vec{a}, \vec{b})| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \; .$$

3. Ebenen
   Jede Ebene wird durch zwei Richtungsvektoren $\vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt. Sie ist definiert

[2]Hermann Amandus Schwarz: ∗ 25.1.1843, † 30.11.1921 Berlin. Professuren in Halle, Zürich, Göttingen, Berlin. Arbeiten zur Theorie konformer Abbildungen, partieller Differentialgleichungen und Variationsrechnung.



Konstruktion von Ebenen durch Vektoren

durch die Menge aller Punkte, für die gilt

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}\,, \quad \lambda, \mu \in \mathcal{R}\,.$$

Der Normalenvektor einer Ebene steht senkrecht auf der Ebene und definiert die Orientierung der Ebene im Raum

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}\,.$$

Somit kann man die Ebene auch als Menge aller Punkte $\vec{r}$ definieren mit[3]

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) = 0 \quad \text{(Hesse - Normalform)}\,.$$

Zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden unter dem Schnittwinkel

$$\cos\gamma = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\,.$$

Die Schnittgerade ist bestimmt durch die Menge aller Punkte, für die gilt

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{a}_1) = 0 \quad \wedge \quad \vec{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{a}_2) = 0\,.$$

Da die Schnittgerade senkrecht zu beiden Normalenvektoren ist, kann man die Richtung der Schnittgeraden durch $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ definieren. Man benötigt somit nur einen beliebigen Punkt $\vec{d}$ auf der Schnittgeraden, um sie festzulegen

$$\vec{r} = \vec{d} + \nu(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)\,, \quad \nu \in \mathcal{R}\,.$$

[3]Ludwig Otto Hesse: ∗ 22.4.1811 Königsberg, † 4.8.1874 München. Professuren in Königsberg, Halle, Heidelberg und München. Arbeiten zur analytischen Geometrie, Differentialgeometrie und Invariantentheorie.

3.1.4 Lineare Algebra

Matrizen

Das rechteckige Zahlenschema

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit m Zeilen und n Spalten nennt man eine (m $\times$ n) Matrix. Die Zahlen a_{ij} heißen Matrixelemente. Die Zeilen

$$\vec{z}_k = \begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

nennt man Zeilenvektoren, die Spalten

$$\vec{s}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Spaltenvektoren einer Matrix. Vertauscht man Zeilen und Spalten, so erhält man die zu **A** transponierte Matrix

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^T)^T \, .$$

Rechenregeln für Matrizen:

- Addition: $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Skalarmultiplikation: $(\lambda \boldsymbol{A})_{ij} = \lambda a_{ij}$
- Multiplikation einer $(n \times l)$ Matrix **A** mit einer $(l \times m)$ Matrix **B**

  $$c_{ij} \equiv (\boldsymbol{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$$

  C ist eine $(n \times m)$ Matrix und es gilt

  $$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA} \, .$$

  Es lassen sich nur solche Matrizen miteinander multiplizieren, für die gilt: Spaltendimension der ersten Matrix ist gleich der Zeilendimension der zweiten Matrix.

Quadratische Matrizen

Eine Matrix

- ist quadratisch, wenn Zeilen- und Spaltendimensionen gleich sind.
- ist diagonal, wenn
$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$
- heißt Einheitsmatrix, wenn $a_{ij} = \delta_{ij}$.
- ist symmetrisch, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ und $a_{ij} \in \mathcal{R}$.
- ist selbstadjungiert (hermitesch) , wenn $c_{ij} = c^*_{ji}$ und $c_{ij} \in \mathcal{C}$. Für hermitesche Matrizen sind die Diagonalelemente reell.
- ist orthogonal, wenn Zeilen- bzw Spaltenvektoren zueinander orthogonal sind, d.h.
$$\begin{aligned} \vec{z}_i \cdot \vec{z}_j &= \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = \delta_{ij} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T &= \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \sum_{l=1}^{n} a_{il}a_{jl} = \delta_{ij} \; . \end{aligned}$$
- ist unitär, wenn Zeilen- bzw Spaltenvektoren einer komplexwertigen Matrix zueinander orthogonal sind, d.h.
$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^\dagger = \boldsymbol{C}^\dagger\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \sum_{l=1}^{n} c_{il}c^*_{jl} = \delta_{ij} \; .$$

  Beispiel: Drehmatrix mit
$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^T &= \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c^2+s^2 & -cs+sc \\ -sc+cs & s^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; . \end{aligned}$$
- heißt Dreiecksmatrix, wenn
$$\begin{aligned} a_{ij} &= \begin{cases} a_{ij} & i \le j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{obere Dreiecksmatrix} \\ a_{ij} &= \begin{cases} a_{ij} & i \ge j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{untere Dreiecksmatrix} \; . \end{aligned}$$
- heißt invers, wenn $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ (rechts- bzw linksinvers, wenn nur eines der beiden Produkte zur Einheitsmatrix führt). Die inverse Matrix existiert, wenn $\mathbf{A}$ regulär ist.
- Für Matrixprodukte gelten die folgenden Regeln:
$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T &= \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T \\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \; . \end{aligned}$$

Spur und Determinante

Es gibt zwei Zahlenwerte, die man Matrizen zuordnet

- die Spur (engl.: trace) einer Matrix

$$\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A}) \equiv tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$$

mit den Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= \mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{Sp}\,\boldsymbol{B} \\ \mathrm{Sp}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) &= \mathrm{Sp}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}) \\ \mathrm{Sp}(\boldsymbol{A})^T &= \mathrm{Sp}(\boldsymbol{A}) \end{aligned}$$

- die Determinante einer Matrix

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Beispiel:
(a) (2×2) Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \;.$$

(b) Entwicklung einer (3×3) Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \;.$$

Rechenregeln für Determinanten
(i) Laplace'scher Entwicklungssatz (z.B. Entwicklung einer Determinante nach der k-ten Spalte):

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \underbrace{(-1)^{j+k} \det(\boldsymbol{A}_{jk})}_{\text{Adjunkte}}$$

$\boldsymbol{A}_{jk}$ ist die $(n-1 \times n-1)$ Matrix, die man durch Streichung der j-ten Zeile und k-ten Spalte erhält.
(ii) Bei Vertauschung von Zeilen bzw Spalten kehrt sich das Vorzeichen der Determinante um.
(iii) Die Determinante ist 0, falls mindestens zwei Zeilen (bzw Spalten) linear abhängig sind. (Z.B. zwei Zeilen (Spalten) sind gleich)

(iv) Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente.
(v) Weitere Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda \boldsymbol{A}) &= \lambda^n \det(\boldsymbol{A}) \\
\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{B}) \\
\det(\boldsymbol{A})^T &= \det(\boldsymbol{A}) \\
\det(\boldsymbol{A})^{-1} &= \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \\
\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) &= \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}) \\
\det(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) &= \det(\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

Lineare Abbildungen

Eine Abbildung zwischen zwei Vektorräumen heißt linear, wenn gilt

$$\begin{aligned}
f(\vec{a}+\vec{b}) &= f(\vec{a}) + f(\vec{b}) \\
f(\lambda \vec{a}) &= \lambda f(\vec{a}) \; .
\end{aligned}$$

Eine lineare Abbildung lässt sich immer mit Hilfe von Matrizen darstellen z.B.

$$\vec{y} = \boldsymbol{A}\vec{x} \; .$$

Für die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen gilt

$$\begin{aligned}
\vec{y} = \boldsymbol{A}\vec{x} & \qquad \vec{z} = \boldsymbol{B}\vec{y} \\
\vec{z}(\vec{y}) = \boldsymbol{B}\vec{y} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{z}(\vec{x})
\end{aligned}$$

- Spezielle lineare Abbildungen sind lineare Gleichungssysteme

  $$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b} \; .$$

  D.h. man suche denjenigen Vektor $\vec{x}$, der vermittels der linearen Abbildung $\boldsymbol{A}$ in einen bekannten Vektor $\vec{b}$ abgebildet wird. Die Lösung des inhomogenen Gleichungssytems existiert, wenn $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$. Dann ist $\boldsymbol{A}$ regulär, d.h. es existiert die Inverse, so dass

  $$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b} \quad \vec{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{b} \; .$$

  Die Cramer'sche Regel[4] erlaubt eine explizite Formulierung der Lösung

  $$x_k = \frac{\det(\boldsymbol{A}_k)}{\det(\boldsymbol{A})} \quad \boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

[4]Gabriel Cramer: ∗ 31.7.1704 Genf, † 4.1.1752 Nimes. Philosoph und Mathematiker an der Universität Genf, später Kommunalpolitiker in Genf. Beiträge zur linearen Algebra.

- Spezielle lineare Gleichungssysteme sind Eigenwertprobleme

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \alpha\vec{x} \ .$$

D.h. man suche diejenigen Vektoren $\vec{x}$, die mittels der linearen Abbildung $\boldsymbol{A}$ in sich selbst abgebildet werden. $\vec{x}, \alpha$ nennt man die Eigenvektoren bzw Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$. Die notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung des homogenen Gleichungssystems

$$(\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{E})\vec{x} = 0$$

ist

$$\det(\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{E}) = 0 \ .$$

Man bezeichnet diese Bedingung als die charakteristische Gleichung des Eigenwertproblems. Es handelt sich dabei um eine Gleichung n-ten Grades im Eigenwert mit genau n Lösungen (Fundamentalsatz der Algebra). D.h. die charakteristische Gleichung liefert alle Eigenwerte der Matrix. Die Eigenvektoren erhält man schließlich durch Lösung der homogenen Gleichungssysteme zu jedem Eigenwert.

Kapitel 4

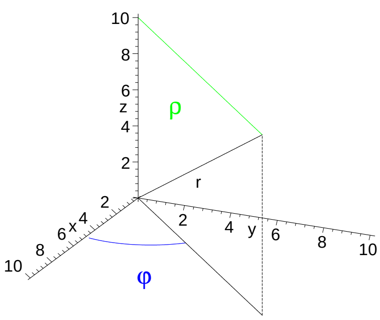
Analysis von Funktionen mehrerer Veränderlicher

4.1 Differentialrechnung

In der Physik hat man es in der Regel mit Funktionen mehrerer Variablen zu tun, z.B. Eigenschaften, die von den drei Ortsvariablen $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ abhängen. Diese Funktionen können Skalare, Vektoren oder Tensoren sein. Man bezeichnet sie als Felder. Funktionen mehrerer Variablen kann man auf verschiedene Weisen darstellen. Zunächst ist es günstig Koordinatensysteme zu wählen, welche die Symmetrien der Funktionen ausnutzen:

1. Koordinatensysteme:

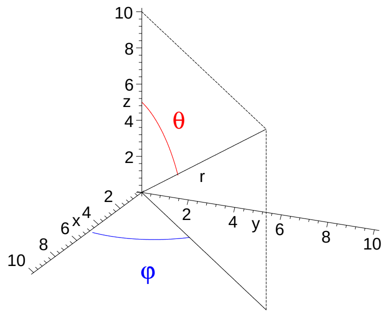
   - Sind keine Symmetrien bekannt, wird man i.a. kartesische Koordinaten bevorzugen.
   - Bei Rotationssymmetrie bezüglich einer Achse (Wahl: z-Achse), wählt man Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) mit der Definition:



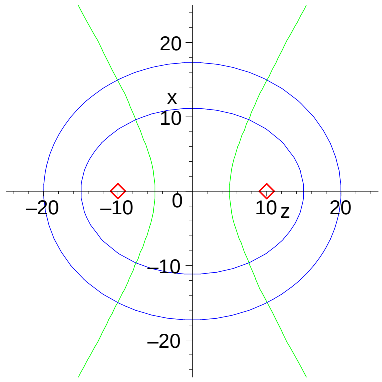
$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi & \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ y &= \rho\sin\phi & \phi &= \arctan\frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}$$

   - Für zentralsymmetrische Systeme sind Kugelkoordinaten (Polarkoordinaten) (r, θ, ϕ) geeignet. Jeder Raumpunkt lässt sich erreichen durch den Schnitt der drei Flächen r=const (Kugelschalen mit bestimmtem Radius), ϕ=const (Halbebenen senkrecht zur x-y-Ebene) und θ=const (Halbebenen senkrecht zur Ebene ϕ=const).

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi\sin\theta & r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ y &= r\sin\phi\sin\theta & \phi &= \arctan\frac{y}{x} \\ z &= r\cos\theta & \theta &= \arccos\frac{z}{r} \end{aligned}$$



- Systeme mit zwei Symmetriezentren im Abstand R können z.B. in elliptischen Koordinaten (ξ,η,ϕ) dargestellt werden: Jeder Raumpunkt wird durch



$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{2}\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\phi \\ y &= \frac{R}{2}\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\phi \\ z &= \frac{R}{2}\xi\eta \end{aligned}$$

den Schnitt der drei Flächen ξ=const (Ellipsoide), η=const (Hyperboloide), ϕ=const (Halbebenen) dargestellt mit der Definition

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r_1+r_2}{R} \\ \eta &= \frac{r_1-r_2}{R} \\ \phi &= \arctan\frac{y}{x} \\ r_{1/2} &= \sqrt{x^2+y^2+(z\mp\frac{R}{2})^2}\,. \end{aligned}$$

In der Regel lassen sich Funktionen mehrerer Variablen nur schwierig darstellen. $T(xy)$ ist eine Fläche im dreidimensionalen Raum (z.B. die Temperaturverteilung eines Ceran Kochfeldes), ρ(xyz) eine Hyperfläche im vierdimensionalen Raum (hier endet das Vorstellungsvermögen). Man kann aber eine Dimension reduzieren, indem man die Höhenlinien bzw Äquipotentialflächen einer Funktion bestimmt:

2. Höhenlinien $z(xy)=k$

- Kugel

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

$$\begin{aligned} r &= R \quad \text{Polarkoordinaten} \\ z = k &\Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 - k^2 \end{aligned}$$

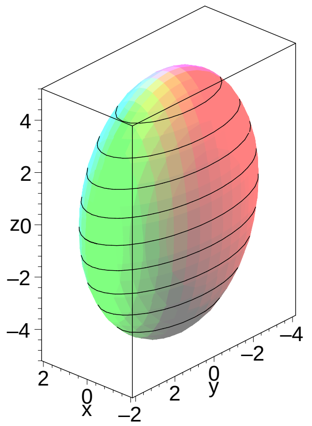
Die Höhenlinien einer Kugel sind konzentrische Kreise mit Radius $\sqrt{R^2 - k^2}$.

- Ellipsoid

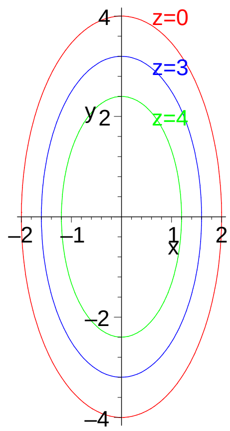
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ z = k &\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \end{aligned}$$

Die Höhenlinien eines Ellipsoides sind Ellipsen mit den Halbachsen

$$\tilde{a} = a\sqrt{(1 - k^2/c^2)} \quad \tilde{b} = b\sqrt{(1 - k^2/c^2)}$$



Ellipsoid



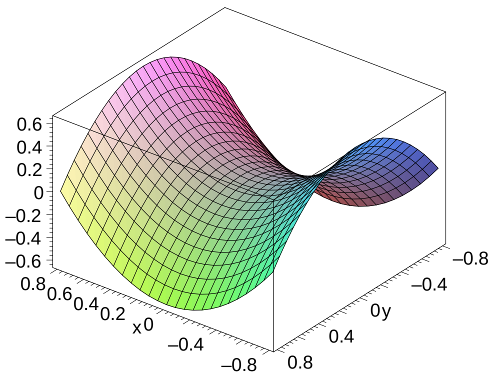
Höhenlinien des Ellipsoids

- Hyperbolisches Paraboloid

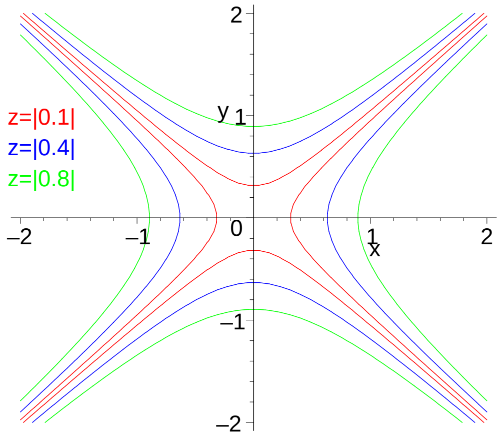
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= z \quad \text{(Sattel)} \\ z = 0 &\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \quad \rightarrow \quad y = \pm\frac{b}{a}x \\ z = k &\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k \end{aligned}$$

- 'Himmel und Hölle'

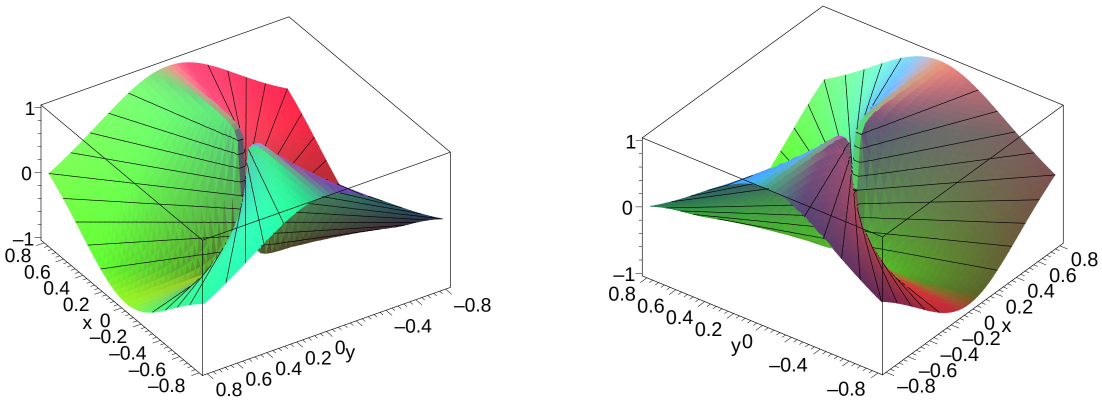
$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= z \\ \text{in Zylinderkoordinaten} &\rightarrow z = \cos(2\phi) \\ z = k &\Rightarrow y = \pm\sqrt{(1-k)/k+1)}x \quad \text{Geraden} \end{aligned}$$



Sattelfläche



Höhenlinien der Sattelfläche



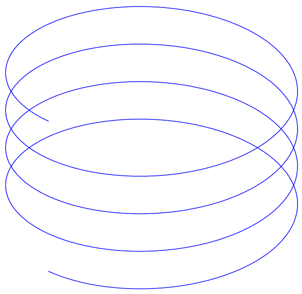
Die Fläche $z = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

3. Die Begriffe Grenzwert und Stetigkeit können wir aus der Analysis I übertragen. Eine Skalarfunktion $f(\vec{x})$ heißt stetig in $\vec{x}_0 \in \mathcal{D}$, wenn für jede Vektorfolge $(\vec{x}_n) \in \mathcal{D}$ mit $\vec{x}_m \xrightarrow{m\to\infty} \vec{x}_0$ gilt $\lim_{m\to\infty} f(\vec{x}_m) = f(\vec{x}_0)$. Eine Vektorfunktion heißt stetig, wenn jede Komponente stetig ist.
   Beispiel:
   Die Fläche $z = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ ist nicht stetig in x=y=0

Grenzwert entlang x-Achse $y = 0$	$\lim_{x\to 0} z(x0) = 1$
Grenzwert entlang y-Achse $x = 0$	$\lim_{y\to 0} z(0y) = -1$

   Die Grenzwerte zweier Nullfolgen sind ungleich. Somit ist z unstetig in x=y=0.

4. Eine andere Form der Darstellung ist die Parameterdarstellung, z.B. die Kinematik eines Massepunktes $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))^T$ als Funktion des Parameters Zeit. Die Funktion beschreibt eine Raumkurve, die spiralförmige Bewegung auf einer Zylinderfläche mit dem Radius R.



$$
\begin{aligned}
x(t) &= R\cos\omega t \\
y(t) &= R\sin\omega t \\
z(t) &= vt
\end{aligned}
$$

Spiralkurve

4.1.1 Ableitungen

(1) Partielle Ableitungen

- Sei f eine Skalarfunktion $f : \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ stetig in einem Raumpunkt $\vec{x}_0$. Dann definiert man als partielle Ableitung die Ableitung entlang einer Koordinate $\vec{x}_k$, indem man alle anderen Koordinaten als konstant annimmt und schreibt

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}|_{\vec{x}_0} \equiv f_{x_k}(\vec{x}_0) \equiv f_k(\vec{x}_0) \equiv \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{e}_k) - f(\vec{x}_0)}{h}$$

- Ist $\vec{f}$ eine Vektorfunktion $\vec{f} : \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$, so gilt die Definition der partiellen Ableitung komponentenweise.

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
f(\vec{r}) = r \qquad & \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{-\frac{1}{2}} = \frac{x_k}{r} \\
\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r} \qquad & \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j) = \vec{e}_k \\
f(xy) = xy \qquad & f_x = y \; f_y = x
\end{aligned}
$$

Die partielle Ableitung bestimmt den Anstieg der Tangentialebene in einem Funktionswert entlang einer bestimmten Koordinatenrichtung.

Rechenregeln für partielle Ableitungen	
Skalarfunktionen $f, g : \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}, \lambda \in \mathcal{R}$	Vektorfunktionen $\vec{u}, \vec{v} : \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m, \lambda \in \mathcal{R}$
$\frac{\partial}{\partial x_j}(f+g) = f_j + g_j$ $\frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda f) = \lambda f_j$ $\frac{\partial}{\partial x_j}(fg) = f_j g + f g_j$	$\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec{u}+\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\vec{u} + \frac{\partial}{\partial x_j}\vec{v}$ $\frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda\vec{u}) = \lambda\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{u}$ $\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{u})\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot(\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{v})$ $\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec{u}\times\vec{v}) = (\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{u})\times\vec{v} + \vec{u}\times(\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{v})$

(2) Richtungsableitung
Statt sich auf eine bestimmte Koordinatenrichtung zu beschränken, kann man sich auch für die Ableitung einer Funktion entlang einer beliebig vorgegebenen Raumrichtung interessieren.

- Sei $f : \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ und $\vec{e}$ ein Einheitsvektor mit der kartesischen Darstellung

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \sum_{j=1}^{n} \cos\alpha_j \vec{e}_j \\ \vec{e}\cdot\vec{e}_j &= \cos\alpha_j \quad \text{Richtungscosinus} \\ \to \sum_{j=1}^{n} (\cos\alpha_j)^2 &= \vec{e}\cdot\vec{e} = 1 \end{aligned}$$

Dann ist die Richtungsableitung entlang $\vec{e}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}|_{\vec{x}_0} &\equiv f_{\vec{e}}(\vec{x}_0) \equiv D^{(\alpha_1\ldots\alpha_n)} f(\vec{x}_0) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{e}) - f(\vec{x}_0)}{h} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \cos\alpha_j f_j(\vec{x}_0) \ . \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich vereinfachen, wenn man einen Differentialoperator definiert, den Nabla (del)- Operator

$$\begin{aligned} \nabla &\equiv \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \vec{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n} \\ &\equiv \sum_{j=1}^{n} \vec{e}_j \partial_j \ . \end{aligned}$$

Wirkt dieser Differentialoperator auf eine <u>Skalarfunktion</u>, so vereinbart man als Rechenregel

$$\begin{aligned} \nabla f &\equiv \operatorname{grad} f \quad \text{Gradient von f} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \vec{e}_j \partial_j f = \sum_{j=1}^{n} \vec{e}_j f_j \ . \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Richtungsableitung umschreiben zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}|_{\vec{x}_0} &= \sum_{j=1}^{n} \cos\alpha_j f_j(\vec{x}_0) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \vec{e}\cdot\vec{e}_j f_j \\ &= \vec{e}\cdot\nabla f|_{\vec{x}_0} \ . \end{aligned}$$

Bemerkungen:
(i)Das Skalarprodukt $\vec{e} \cdot \nabla f$ ist maximal, wenn $\vec{e}$ und ∇f kolinear sind. Somit hat die Funktion in Richtung ihres Gradienten die größte Steigung

$$\vec{e} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \vec{e} \cdot \nabla f = |\nabla f| \; ,$$

bzw in entgegengesetzter Richtung das größte Gefälle

$$\vec{e} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = -|\nabla f| \; .$$

(ii) Der Gradient einer Skalarfunktion ist orthogonal zu deren Äquipotentialfläche (Erweiterung des Konzepts der Höhenlinien). D.h. sei $f : \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ und $f(\vec{x}) = c$ die Fläche, für die f den Wert c annimmt, so gilt für zwei benachbarte Punkte $\vec{x}, \vec{x} + \mathrm{d}\,\vec{x}$ der Äquipotentialfläche

$$0 = \underbrace{f(\vec{x} + \mathrm{d}\,\vec{x})}_{=c} - \underbrace{f(\vec{x})}_{=c} = \nabla f(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\,\vec{x} \; .$$

Da $\mathrm{d}\,\vec{x}$ Element der Äquipotentialfläche ist, steht somit der Gradient einer Funktion immer senkrecht zur entsprechenden Äquipotentialfläche in einem Raumpunkt.

(3) Totales Differential
Unter dem Begriff totales Differential versteht man den linearen Zuwachs einer Funktion. Er ist definiert als

$$\mathrm{d}\,f = \nabla f|_{\vec{x}_0} \cdot \mathrm{d}\,\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} f_j(\vec{x}_0)\,\mathrm{d}\,x_j \; .$$

Anwendung: Fehlerrechnung
Sei f eine Funktion der Messgrößen $x_1 \ldots x_n$ mit den Messfehlern $\triangle x_1 \ldots \triangle x_n$, so erhält man eine lineare Abschätzung des Messfehlers in f durch (Dreiecksungleichung!)

$$|\triangle f| \leq \sum_{j=1}^{n} |f_j||\triangle x_j| \; .$$

(4) Kettenregel
Sei f eine Funktion der Raumkoordinaten, die ihrerseits von der Zeit abhängen, dann ist f implizit zeitabhängig und es gilt ('dividiere' das totale Differential durch $\mathrm{d}\,t$)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}\,x_1}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}\,x_2}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\mathrm{d}\,x_3}{\mathrm{d}\,t} \\ &= \sum_{j=1}^{3} f_j \dot{x}_j \; . \end{aligned}$$

Verallgemeinerung: Sei $f : \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ und $\vec{x} = \vec{x}(\vec{u})$ eine Abbildung zwischen Koordinaten. Sind ferner $f(\vec{x})$ und $\vec{x}(\vec{u})$ partiell differenzierbar, dann ist auch $f(\vec{u})$ partiell differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_i} \quad i = 1, \ldots, n \; .$$

(5) Gradient, Divergenz, Rotation
Wir haben gesehen, dass die Einführung von Differentialoperatoren ein nützliches Konzept für eine zusammenfassende Darstellung möglicher partieller Ableitungen ist. Wendet man den Nablaoperator auf Skalar- oder Vektorfelder an, so erhält man verschiedene Aussagen

- Operation auf Skalarfelder: Gradient

$$\mathrm{grad}\, f \equiv \nabla f = \sum_{j=1}^{n} \vec{e}_j f_j$$

ergibt einen <u>Vektor</u>, dessen Betrag die maximale Änderung des Skalarfeldes angibt und dessen Richtung senkrecht zu Äquipotentialflächen von f steht.

- Operation auf Vektorfelder: Divergenz

$$\mathrm{div}\, \vec{f} \equiv \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j$$

ergibt einen <u>Skalar</u>, der ein Maß für die lokale Quellstärke eines Vektorfeldes in einem Raumpunkt ist.

- Operation auf Vektorfelder: Rotation
Im dreidimensionalen Raum gilt die Rechenregel

$$\mathrm{rot}\, \vec{f} \equiv \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial x_1 & \partial x_2 & \partial x_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} .$$

Sie ergibt einen <u>Vektor</u>, dessen Betrag ein Maß für die lokale Wirbelstärke eines Vektorfeldes in einem Raumpunkt ist.

- Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}(fg) &= (\mathrm{grad}\, f)g + f(\mathrm{grad}\, g) = (\nabla f)g + f(\nabla g) \\
\mathrm{div}(f\vec{u}) &= (\mathrm{grad}\, f)\cdot\vec{u} + f(\mathrm{div}\,\vec{u}) = (\nabla f)\cdot\vec{u} + f(\nabla\cdot\vec{u}) \\
\mathrm{rot}(f\vec{u}) &= (\mathrm{grad}\, f)\times\vec{u} + f(\mathrm{rot}\,\vec{u}) = (\nabla f)\times\vec{u} + f(\nabla\times\vec{u}) \\
\mathrm{grad}(\vec{u}\cdot\vec{v}) &= (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u} + \vec{u}\times(\nabla\times\vec{v}) + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{u}) \\
\mathrm{div}(\vec{u}\times\vec{v}) &= \vec{v}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} - \vec{u}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} \\
\mathrm{rot}(\vec{u}\times\vec{v}) &= (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u} - (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{v} + \vec{u}(\nabla\cdot\vec{v}) - \vec{v}(\nabla\cdot\vec{u}) .
\end{aligned}$$

Beispiele:
$f(r)$ Skalarfunktion nur der radialen Koordinate $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\nabla f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \nabla r = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} .$$

Dimension des Raumes

$$\mathrm{div}\, \vec{r} = \nabla \cdot \vec{r} = 3 .$$

Rotation des Ortsvektors

$$\mathrm{rot}\, \vec{r} = \vec{e}_x(\partial_y z - \partial_z y) - \vec{e}_y(\partial_x z - \partial_z x) + \vec{e}_z(\partial_x y - \partial_y x) = 0 .$$

4.1.2 Ableitungen höherer Ordnung

Ist eine Funktion $f : \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ innerhalb ihres Definitionsbereiches k- mal stetig differenzierbar, so nennt man die Funktion ein Element der Menge $\mathcal{C}^k(\mathcal{D})$ bzw $\mathcal{C}^k$-Funktion. Ist f eine $\mathcal{C}^2$-Funktion, so kann man verschiedene zweite Ableitungen definieren

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial f}{\partial x_j}) \equiv f_{kj} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \; .$$

Nach dem Satz von Schwarz gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = f_{kj} = f_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \; .$$

Die Menge der zweiten Ableitungen lässt sich in einer Matrix zusammenfassen – der Hesse-Matrix

$$(f_{kj}) = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \; .$$

Die Hesse- Matrix ist symmetrisch. Die Spur der Hesse- Matrix hat eine besondere Bedeutung. Man definiert

$$\mathrm{Sp}(f_{kj}) = \sum_{j=1}^{n} f_{jj} =: \triangle f \; ,$$

mit dem Laplaceoperator[1]

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \equiv \nabla \cdot \nabla \; .$$

Für Ableitungen zweiter Ordnung gelten folgende Rechenregeln als Konsequenz des Satzes von Schwarz

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) &= 0 \quad \text{Gradientenfelder sind wirbelfrei} \\ \mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \vec{u}) &= 0 \quad \text{Wirbelfelder sind quellenfrei} \\ \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \vec{u}) &= \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \vec{u}) - \triangle \vec{u} \; . \end{aligned}$$

4.1.3 Taylorreihe

Exemplarisch für Funktionen zweier Variablen soll gezeigt werden, wie man Funktionen mehrerer Variablen in einer Potenzreihe entwickeln kann. Sei $f(xy)$ eine $\mathcal{C}^{(n+1)}$ Funktion,

[1]Pierre Simon Laplace: ∗ 28.3.1749 Auge, † 5.3.1827 Paris. Professur an der Militärschule von Paris. Hauptwerke: Analytische Theorie der Wahrscheinlichkeit (1812) (erzeugende Funktionen, Laplacetransformation), Himmelsmechanik (1825) (Störungstheorie der Planetenbewegung, Potentialtheorie (Laplacegleichung)).

so gilt

$$\begin{aligned}
f(x+h,y+k) &= f(xy)+[f_xh+f_yk]+\frac{1}{2!}[f_{xx}h^2+2f_{xy}hk+f_{yy}k^2]+\ldots+R_n\\
&= f(xy)+[h\partial_x+k\partial_y]f+\frac{1}{2!}[h\partial_x+k\partial_y]^2f+\ldots+\frac{1}{n!}[h\partial_x+k\partial_y]^nf+R_n\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}[h\partial_x+k\partial_y]^jf(xy)+R_n\\
&= \exp\,(h\partial_x+k\partial_y)f(xy)+R_n\\
R_n &= \frac{1}{(n+1)!}[h\partial_x+k\partial_y]^{n+1}f(x+\lambda h,y+\mu k)\quad \lambda,\mu\in(0,1)\ .
\end{aligned}$$

Die formale Erweiterung sieht man sofort ein

$$f(\vec{x}+\vec{h})=\exp(\vec{h}\cdot\nabla)f(\vec{x})+R_n\ ,$$

wenn man den Exponentialoperator wieder als Potenzreihe auffasst.

Beispiel:
Entwickle die Funktion $\sin(xy)$ bis zur zweiten Ordnung um (00):

$$\begin{aligned}
f_x &= y\cos(xy);\ f_y=x\cos(xy)\quad f_{xx}=-y^2\sin(xy);\ f_{yy}=-x^2\sin(xy)\\
f_{xy} &= \cos(xy)-xy\sin(xy)=f_{yx}\\
f(xy) &= f(00)+f_xx+f_yy+\frac{1}{2!}(f_{xx}x^2+2f_{xy}xy+f_{yy}y^2)+\ldots\\
&= f(00)+xy+\ldots\ .
\end{aligned}$$

4.1.4 Stationäre Punktlösungen

Analog zur Definition lokaler Extremwerte für Funktionen einer Variablen definieren wir die

- notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums einer Funktion $f:\mathcal{D}\subset\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}$:
  Ist f partiell differenzierbar in $\vec{x}_0\in\mathcal{D}$ und gilt
  $$\nabla f|_{\vec{x}_0}=\vec{0}\ ,$$
  so nennt man $\vec{x}_0$ einen kritischen (stationären) Punkt.
- hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums:
  Ist $f\in\mathcal{C}^2$, $\vec{x}_0$ ein stationärer Punkt und gilt für die Hesse- Matrix
  $$\begin{aligned}
  (f_{x_kx_j})\text{ positiv definit} &\quad\Rightarrow\quad f\text{ besitzt in }\vec{x}_0\text{ ein lokales Minimum}\\
  (f_{x_kx_j})\text{ negativ definit} &\quad\Rightarrow\quad f\text{ besitzt in }\vec{x}_0\text{ ein lokales Maximum}\\
  (f_{x_kx_j})\text{ indefinit} &\quad\Rightarrow\quad f\text{ besitzt in }\vec{x}_0\text{ einen Sattel}\ .
  \end{aligned}$$

Man nennt eine symmetrische $(n \times n)$ Matrix definit, wenn für jeden Vektor $\vec{x} \in \mathcal{R}^n$ die quadratische Form

$$q(\vec{x}) = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

eine der folgenden Bedingungen erfüllt

$$\begin{array}{ll} q(\vec{x}) > 0 & \boldsymbol{A} \text{ ist positiv definit} \\ q(\vec{x}) \geq 0 & \boldsymbol{A} \text{ ist positiv semidefinit} \\ q(\vec{x}) < 0 & \boldsymbol{A} \text{ ist negativ definit} \\ q(\vec{x}) \leq 0 & \boldsymbol{A} \text{ ist negativ semidefinit .} \end{array}$$

Gilt für zwei Vektoren

$$q(\vec{u}) > 0 \quad q(\vec{v}) < 0 \,,$$

so nennt man **A** indefinit.

Beispiele:
(a) Untersuche die Sattelfläche in (00):

$$\begin{aligned} f(xy) &= x^2 - y^2 \\ f_x = 2x &\rightarrow f_x|_{x=0} = 0 \\ f_y = -2y &\rightarrow f_y|_{y=0} = 0 \\ (f_{xy}) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Überprüfe die quadratische Form mit den kanonischen Einheitsvektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} q(\vec{u}) &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \\ q(\vec{v}) &= (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \,. \end{aligned}$$

D.h. in (00) liegt ein Sattelpunkt.

(b) Untersuche die folgende Funktion auf lokale Extrema:

$$\begin{aligned} f(xy) &= r^4 - r^2 \quad r^2 = x^2 + y^2 \\ \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \nabla r = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} \\ &= (4r^2 - 2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow (1)\; x = y = 0 \quad (2)\; r = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Berechne Hesse- Matrix

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 4r^2 - 2 + 8x^2 \\ f_{xy} &= f_{yx} = 8xy \\ f_{yy} &= 4r^2 - 2 + 8y^2 \end{aligned}$$

(1) Hesse- Matrix in x=y=0:

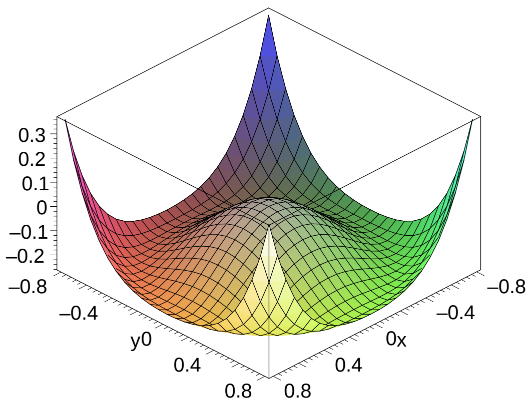
$$(f_{xy})|_{00} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Für jeden beliebigen Vektor ist die quadratische Form

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \vec{u}^{\,T}(f_{xy})\vec{u} = -2(a^2 + b^2) < 0 .$$

Somit liegt in (00) ein lokales Maximum vor.
(2) Hesse- Matrix in $r = 1/\sqrt{2}$ (wähle Polarkoordinaten):

$$\begin{aligned} (f_{xy})|_{r^2=1/2} &= \begin{pmatrix} 4\cos^2\phi & 4\cos\phi\sin\phi \\ 4\cos\phi\sin\phi & 4\sin^2\phi \end{pmatrix} \\ q(\vec{u}) &= 4a^2\cos^2\phi + 8ab\cos\phi\sin\phi + 4b^2\sin^2\phi \\ &= 4(a\cos\phi + b\sin\phi)^2 > 0 . \end{aligned}$$



Die 'Kuchenform- Fläche' (muffin- tin)

Für den Kreis mit dem Radius $r = 1/\sqrt{2}$ liegt somit ein Minimum vor.

Darüber hinaus können wir auch Extrema einer Funktion f suchen unter einer einschränkenden Nebenbedingung g, d.h. wir betrachten die Funktion f nicht mehr im gesamtem Definitionsbereich $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n$, sondern in dem durch die Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$ eingeschränkten Teilbereich

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{\vec{x} \in \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n | g(\vec{x}) = 0\} .$$

Somit erhält man eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums in $\vec{x}_0$: unter der Voraussetzung, dass $g(\vec{x}_0) = 0$ (Nebenbedingung) und $\nabla g|_{\vec{x}_0} \neq 0$ existiert ein $\lambda \in \mathcal{R}$ mit

$$0 = \nabla f(\vec{x}_0) + \lambda \nabla g(\vec{x}_0) = \nabla (f + \lambda g)|_{\vec{x}_0} \ .$$

Die erweiterte Funktion, deren Extremwerte man finden möchte

$$L = f + \lambda g$$

nennt man Lagrangefunktion, λ den Lagrange Multiplikator.

4.2 Integralrechnung

Auch die Integration ist ähnlich wie die Differentiation eine unmittelbare Erweiterung dessen, was wir für Funktionen einer Variablen besprochen haben, mit dem Unterschied, dass unbestimmte Integrale von Funktionen mehrerer Veränderlicher nicht sinnvoll sind. Entsprechend der mehrdimensionalen Definitionsbereiche muss man auch zwischen verschiedenen Typen von Integralen differenzieren. In der Physik sind folgende Integrale von Bedeutung

Integraltypen				
Skalarfunktionen $f, g : \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}, \lambda \in \mathcal{R}$			Vektorfunktionen $\vec{u}, \vec{v} : \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3, \lambda \in \mathcal{R}$	
Typ	Anwendung	Bemerkungen	Typ	Anwendung
$\int_C f(\vec{r})\,\mathrm{d}\,l$	f=1: Länge von C	Kurvenintegrale I., II. Art	$\int_C \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$	$\vec{v} = \vec{F}$: Arbeitsintegral
$\iint_S f(\vec{r})\,\mathrm{d}\,s$	Volumen zwischen f und S	Doppelintegral, Oberflächenintegral	$\iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{s}$	Fluss von $\vec{v}$ durch Oberfläche
$\iiint_V f(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\,r$	$f = \rho$: Masse, Ladung in V	Dreifachintegral,		

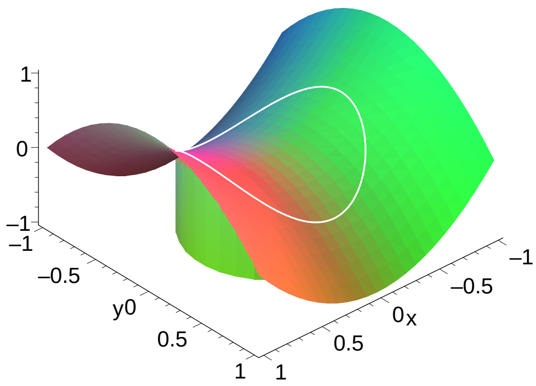
4.2.1 Kurvenintegrale

(1) Kurvenintegrale I. Art sind Einfachintegrale über Skalarfunktionen entlang einer vorgegebenen Kurve C. Ist die Kurve in Parameterdarstellung zwischen zwei Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ vorgegeben

$$C : \ \vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T \quad t_1 \leq t \leq t_2, \ \vec{r}_1 = \vec{r}(t_1), \ \vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$$

und das Bogenelement $\mathrm{d}\,l$ entlang der Kurve in einem Kurvenpunkt (Pythagoras)

$$\mathrm{d}\,l = \sqrt{(\mathrm{d}\,x)^2 + (\mathrm{d}\,y)^2 + (\mathrm{d}\,z)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ \mathrm{d}\,t\ ,$$



Die Mantelfläche des Zylinders unterhalb der Sattelfläche ist durch ein Kurvenintegral I. Art gegeben

so ergibt sich für das Kurvenintegral I. Art die Berechnungsvorschrift

$$\int_C f(\vec{r})\,\mathrm{d}\,l = \int_{t_1}^{t_2} f(\vec{r}(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,\mathrm{d}\,t\ .$$

Für $f = 1$ entspricht dem Kurvenintegral die Länge der Kurve C zwischen Anfangs- und Endpunkt $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. Ist $f : \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ eine Fläche $f = f(xy)$ und C die ebene Kurve $z(t) = 0$, so lässt sich das Kurvenintegral als die Mantelfläche des Zylinders zwischen C und f interpretieren.

Beispiel:
Berechne die Bogenlänge der Kurve

$$\begin{aligned} C:\ x(t) = R\cos t,\ y(t) &= R\sin t,\ z(t) = 0 \quad 0 \le t \le 2\pi \\ \int_C \mathrm{d}\,l = \int_0^{2\pi}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}\,t &= R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,t = 2\pi R\ . \end{aligned}$$

(2) Kurvenintegrale II. Art sind Integrale über Vektorfunktionen $\vec{v}$ entlang vorgegebener Kurven. Genauer handelt es sich dabei um die Summation der Projektionen $\vec{v}\cdot\mathrm{d}\,\vec{l}$ eines Vektorfeldes $\vec{v}$ entlang des gerichteten Bogenelementes $\mathrm{d}\,\vec{l}$. Ist C in Parameterdarstellung gegeben, so gilt

$$\begin{aligned} \int_C \vec{v}\cdot\mathrm{d}\,l &= \int_C (v_x\,\mathrm{d}\,x + v_y\,\mathrm{d}\,y + v_z\,\mathrm{d}\,z) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\cdot\dot{\vec{r}}\,\mathrm{d}\,t\ . \end{aligned}$$

Ist insbesondere $\vec{v}$ ein Gradientenfeld mit $\vec{v} = \mathrm{grad}\,\phi$ so gilt

$$\begin{aligned} \int_C \vec{v}\cdot\mathrm{d}\,l &= \int_C (\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\mathrm{d}\,x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\mathrm{d}\,y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,\mathrm{d}\,z) \\ &= \int \mathrm{d}\,\phi = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)\ . \end{aligned}$$

Das Kurvenintegral ist unabhängig von der speziellen Kurvenform (Weg) lediglich eine Funktion des Anfangs- und Endpunktes $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ der Kurve. Insbesondere verschwindet das Integral über eine geschlossene Kurve

$$\oint \nabla\phi\,\mathrm{d}\,\vec{l} = 0\ .$$

Das ist das definierende Merkmal für Gradientenfelder (konservative Kräfte): sie sind wirbelfrei (zirkulationsfrei).

Beispiel:
Berechne das Kurvenintegral von $\vec{r}_1 = (000)$ nach $\vec{r}_2 = (111)$ über das Vektorfeld $\vec{v} = (x+yz, y+xz, z+xy)^T$ entlang der Kurven (a) $C_1: \ x = t, y = t^2, z = t^3 \quad 0 \leq t \leq 1$ und (b) $C_2: \ (000)-(100), \ (100)-(110), \ (110)-(111)$.
Zu (a):

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} &= \int_0^1 [(x+yz)\dot{x} + (y+xz)\dot{y} + (z+xy)\dot{z}] \ \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 (t+t^5) \ \mathrm{d}\,t + \int_0^1 (t^2+t^4)2t \ \mathrm{d}\,t + \int_0^1 (t^3+t^3)3t^2 \ \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 (t + 2t^3 + 9t^5) \ \mathrm{d}\,t \\
&= [\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{2}t^6]|_0^1 = \frac{5}{2} \, .
\end{aligned}$$

Zu (b):

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} &= \int_0^1 (x+yz)|_{\substack{y=0\\z=0}} \ \mathrm{d}\,x + \int_0^1 (y+xz)|_{\substack{x=1\\z=0}} \ \mathrm{d}\,y + \int_0^1 (z+xy)|_{\substack{x=1\\y=1}} \ \mathrm{d}\,z \\
&= \frac{1}{2}x^2|_0^1 + \frac{1}{2}y^2|_0^1 + (\frac{1}{2}z^2 + z)|_0^1 = \frac{5}{2} \, .
\end{aligned}$$

Offenbar ist das Integral wegunabhängig. $\vec{v}$ ist somit ein Gradientenfeld. Wir wollen das überprüfen und nutzen mit $\vec{v} = \mathrm{grad}\,\phi$ die Eigenschaft

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi) = 0 = \mathrm{rot}\,\vec{v}$$

aus, die aus der Symmetrie der Hesse- Matrix folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\vec{v} &= \vec{e}_x(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}) - \vec{e}_y(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}) + \vec{e}_z(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}) \\
&= \vec{e}_x(x-x) - \vec{e}_y(y-y) + \vec{e}_z(z-z) = 0 \, .
\end{aligned}$$

Man sieht die Äquivalenz der Bedingungen für ein zirkulationsfreies Vektorfeld

$$\oint \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rot}\,\vec{v} = 0 \, .$$

4.2.2 Doppelintegrale

(1) Doppelintegrale sind z.B. Integrale einer Skalarfunktion f über einer <u>ebenen</u> Fläche S. Mathematisch etwas genauer ist S ein regulärer Bereich, Teilmenge des Definitionsbereiches von f mit einem Flächeninhalt. Somit ist das Doppelintegral über $f: \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$

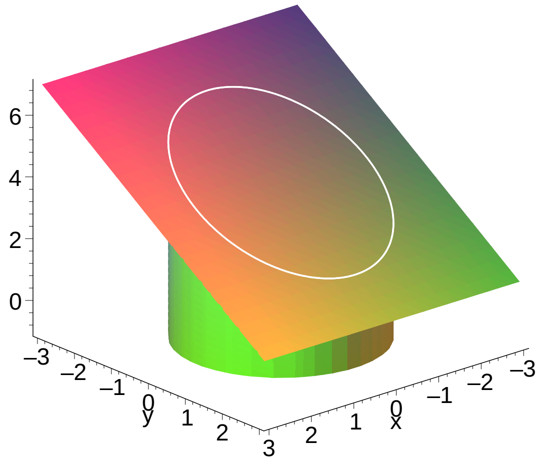
$$\iint\limits_S f(\vec{r}) \ \mathrm{d}\,s = \iint\limits_S f(xy) \ \mathrm{d}\,x \ \mathrm{d}\,y$$

gerade das Volumen des Zylinders mit der Grundfläche S und der Deckelfläche $f(xy)$ mit $(xy) \in S$. Das Doppelintegral ergibt sich als Grenzwert der Summe über die Volumina von Säulen mit infinitesimaler Grundfläche.

Beispiel: Bestimme das Volumen zwischen den ebenen Flächen

$$
\begin{aligned}
f(xy) = z &= 4 - y \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 \leq 4 \\
\iint\limits_S f(xy)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} (4-y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,.
\end{aligned}
$$

Die Aufteilung des Integrationsbereiches S in x und y- Komponenten erfordert einige Überlegung, da x und y über die Kreisgleichung verknüpft sind.



Volumen des Zylinders unterhalb einer schiefen Ebene

(a) Innere Integration über x, äußere Integration über y:

$$
\begin{aligned}
S:\ x &= \pm\sqrt{4-y^2} \quad y \in [-2,2] \\
I &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} (4-y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_{-2}^{2}\Big[\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}(4-y)\,\mathrm{d}\,x\Big]\,\mathrm{d}\,y \\
&= \int_{-2}^{2}(4-y)x\Big|_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\,\mathrm{d}\,y = 2\int_{-2}^{2}(4-y)\sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}\,y\,.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Substitution $y = 2\sin t$ erhält man

$$
\begin{aligned}
I &= 8\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2 - \sin t - 2\sin^2 t + \sin^3 t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t = 16\pi\,.
\end{aligned}
$$

(b) Innere Integration über y, äußere Integration über x:

$$
\begin{aligned}
S:\ y &= \pm\sqrt{4-x^2} \quad x \in [-2,2] \\
I &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} (4-y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_{-2}^{2}\Big[\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4-y)\,\mathrm{d}\,y\Big]\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_{-2}^{2}(4y - \frac{y^2}{2})\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = 8\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}\,x = 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t = 16\pi\,.
\end{aligned}
$$

Offenbar ist es gleichgültig über welche der beiden Raumrichtungen man zuerst integriert! Man sieht aber in jedem Fall, dass die Integration in kartesischen Koordinaten recht beschwerlich werden kann. Könnte man eine Koordinatendarstellung finden, welche die Symmetrien der jeweils gestellten Aufgabe besser ausnutzt, so würden die Integrationsgrenzen unabhängig voneinander. Dieses Ziel erreicht man manchmal mit Hilfe der Substitutionsregel:

- Sei der Integrationsbereich $S(xy) = 0$ in den neuen Koordinaten u, v gegeben, mit $x = x(uv)$ und $y = y(uv)$, so gilt

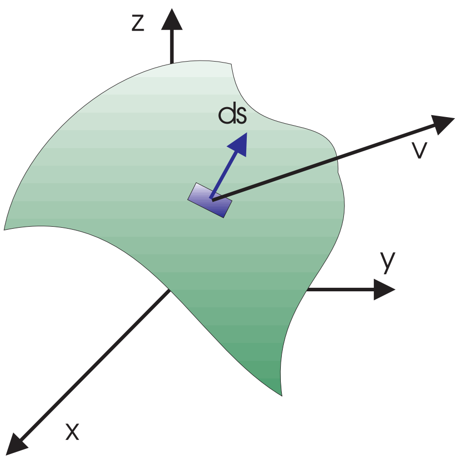
$$\iint_S f(xy)\;\mathrm{d}\,x\;\mathrm{d}\,y = \iint_S f(x(uv)y(uv))D(xy|uv)\;\mathrm{d}\,u\;\mathrm{d}\,v$$

  mit der Jacobi (Funktional) Determinante

$$D(xy|uv) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\;.$$

Für das obige Beispiel sind ebene Polarkoordinaten als Substitution sinnvoll:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad S:\; x^2 + y^2 \leq 4 \to r \leq 2,\; \phi \in [0, 2\pi] \\
D(xy|r\phi) \quad &= \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r \\
I \quad &= \quad \iint_S f(xy)\;\mathrm{d}\,x\;\mathrm{d}\,y = \iint (4 - r\sin\phi)r\;\mathrm{d}\,r\;\mathrm{d}\,\phi \\
&= \quad \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} (4 - r\sin\phi)\;\mathrm{d}\,\phi\right] r\;\mathrm{d}\,r = 8\pi \int_0^2 r\;\mathrm{d}\,r = 16\pi\;.
\end{aligned}$$



Zum Begriff des Flussintegrals

(2) Oberflächenintegrale summieren die Projektion eines Vektorfeldes $\vec{v}$ in allen Punkten einer gegebenen Raumfläche $S(xyz) = 0$ auf die Flächennormale in diesem Raumpunkt (Flussintegral):

$$\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{s}\;.$$

Wir wollen annehmen, dass S in Parameterdarstellung gegeben ist mit

$$S:\; x = x(tu),\; y = y(tu),\; z = z(tu)\;.$$

In jedem Punkt der Fläche finden wir zwei Tangentenvektoren in die Raumrichtungen t und u

$$\vec{s}_t = (\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t})^T \quad \vec{s}_u = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})^T\;.$$

Das gerichtete Oberflächenelement $\mathrm{d}\,\vec{s}$ ergibt sich somit aus

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\vec{s} &= \vec{s}_t \times \vec{s}_u \;\mathrm{d}\,t\;\mathrm{d}\,u \\
\mathrm{d}\,\vec{s} &= \Big[\vec{e}_x(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}) - \vec{e}_y(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}) + \vec{e}_z(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u})\Big]\;\mathrm{d}\,t\;\mathrm{d}\,u \\
&= \Big[\vec{e}_x D(yz|tu) + \vec{e}_y D(zx|tu) + \vec{e}_z D(xy|tu)\Big]\;\mathrm{d}\,t\;\mathrm{d}\,u\,.
\end{aligned}$$

Damit erhält man für das Flussintegral

$$\Phi = \iint\limits_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\,\vec{s} = \iint\limits_{S(tu)} \Big[\vec{v}_x D(yz|tu) + \vec{v}_y D(zx|tu) + \vec{v}_z D(xy|tu)\Big]\;\mathrm{d}\,t\;\mathrm{d}\,u\,.$$

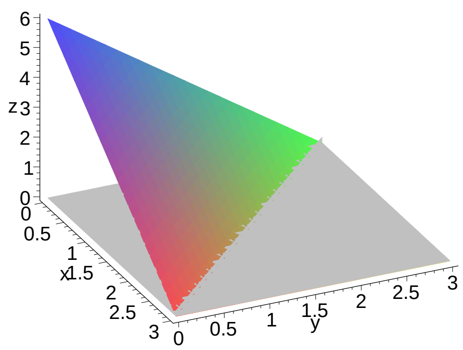
4.2.3 Dreifachintegrale

Volumenintegrale über Skalarfunktionen werden ähnlich berechnet wie Doppelintegrale. Ist V das Volumen, für das gilt

$$V:\ \alpha \le x \le \beta,\ \gamma(x) \le y \le \delta(x),\ \epsilon(xy) \le z \le \zeta(xy),$$

so ergibt sich für das Volumenintegral

$$\iiint\limits_V f(xyz)\;\mathrm{d}\,x\;\mathrm{d}\,y\;\mathrm{d}\,z = \int_\alpha^\beta \Big[\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} \Big[\int_{\epsilon(xy)}^{\zeta(xy)} f(xyz)\;\mathrm{d}\,z\Big]\;\mathrm{d}\,y\Big]\;\mathrm{d}\,x\,.$$



Die Grenzen des Volumens

Beispiel:
Gegeben ist ein Volumen V, das begrenzt wird durch die Ebenen $z = 6 - 2x - 2y$ (bunte Dreicksfläche), $y = 3 - x$ (Teil der x-y Ebene unterhalb der bunten Ebene) und die Koordinatenebenen x-z und y-z. Berechne das Volumenintegral

$$\iiint\limits_V xyz\;\mathrm{d}\,\vec{r} = \iiint\limits_V xyz\;\mathrm{d}\,x\;\mathrm{d}\,y\;\mathrm{d}\,z.$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V xyz\;\mathrm{d}\,x\;\mathrm{d}\,y\;\mathrm{d}\,z &= \int_0^3 x\Big[\int_0^{3-x} y\Big(\int_0^{6-2x-2y} z\;\mathrm{d}\,z\Big)\;\mathrm{d}\,y\Big]\;\mathrm{d}\,x \\
&= \int_0^3 x\Big[\int_0^{3-x} \frac{y}{2}(6-2x-2y)^2\;\mathrm{d}\,y\Big]\;\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{1}{6}\int_0^3 x(3-x)^4\;\mathrm{d}\,x = \frac{81}{20}\,.
\end{aligned}$$

In neuen Koordinaten uvw gilt nach der Substitutionsregel

$$\iiint\limits_V f(xyz)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \iiint\limits_V f(x(uvw)y(uvw)z(uvw))D(xyz|uvw)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v\,\mathrm{d}\,w$$

mit der Funktionaldeterminante (Transformation des Volumenelementes)

$$D(xyz|uvw) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} .$$

Speziell gilt für die wichtigsten Koordinatensysteme:

- Zylinderkoordinaten $(\rho\phi z)$: $\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\phi\,\mathrm{d}\,z$
- Kugelkoordinaten $(r\theta\phi)$: $\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,\phi$
- Elliptische Koordinaten $(\xi\eta\phi)$: $\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = (\frac{R}{2})^3(\xi^2-\eta^2)\,\mathrm{d}\,\xi\,\mathrm{d}\,\eta\,\mathrm{d}\,\phi$

4.2.4 Integralsätze

Die folgenden Integralsätze verknüpfen Kurven-, Oberflächen- und Volumenintegrale. Sie sind von zentraler Bedeutung in der theoretischen Physik.

1. Der Satz von Gauß[2] verknüpft den Fluss eines Vektorfeldes aus einer geschlossenen Fläche S mit dem Volumenintegral über die Divergenz des Vektorfeldes

$$\oint_{S(V)} \vec{v}\cdot\mathrm{d}\,\vec{s} = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}\,V\ ,$$

dabei bedeuten V das Integrationsvolumen und $S(V)$ die das Volumen einschließende Oberfläche. Im Grenzfall infinitesimaler Volumina erhalten wir mit dem Satz von Gauß eine physikalische Interpretation des Begriffes Divergenz. Dazu betrachtet man ein kleines Volumen $\triangle V$, in dem man $\operatorname{div}\vec{v}$ als näherungsweise konstant annehmen kann. Somit gilt

$$\begin{aligned} \oint_{\triangle S(\triangle V)} \vec{v}\cdot\mathrm{d}\,\vec{s} &= \operatorname{div}\vec{v}\,\triangle V \\ \operatorname{div}\vec{v} &= \lim_{\triangle V\to 0}\frac{1}{\triangle V}\oint_{\triangle S(\triangle V)} \vec{v}\cdot\mathrm{d}\,\vec{s}\,. \end{aligned}$$

D.h. die Divergenz beschreibt <u>lokal</u> den Fluss eines Vektorfeldes aus einem infinitesimalen Volumen. Sie analysiert die Quellstärke eines Feldes in einem Raumpunkt

$$\operatorname{div}\vec{v}(\vec{r}) = \begin{cases} >0 & \text{Quelle in } \vec{r} \\ =0 & \text{Quellenfrei} \\ <0 & \text{Senke in } \vec{r} \end{cases} .$$

[2] Carl Friedrich Gauß: ∗ 30.4.1777 Braunschweig, † 23.2.1855 Göttingen. Direktor der Sternwarte und Professor an der Universität Göttingen. Veröffentlichung einer großen Zahl grundlegender Werke, darunter: Disquisitiones arithmeticae (1801) (Zahlentheorie), Die Flächentheorie (1827) (Grundlage der Geodäsie), Schriften über 'biquadratische Reste' (1831)(Primzahltheorie, Einführung der komplexen Zahlenebene), Potentialtheorie (1840).

2. Der Satz von Stokes[3] verknüpft das Kurvenintegral eines Vektorfeldes über einen geschlossenen Weg C mit dem Oberflächenintegral über die Rotation des Vektorfeldes

$$\oint_{C(S)} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{v} \cdot \mathrm{d}\,s\ ,$$

dabei bedeutet S die von der Kurve C umrandete Oberfläche. Im Grenzfall infinitesimaler Flächen erhalten wir mit dem Satz von Stokes eine physikalische Interpretation des Begriffes Rotation. Dazu betrachtet man eine kleine Fläche $\triangle S$, auf der man $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ als näherungsweise konstant annehmen kann. Somit gilt

$$\begin{aligned} \oint_{C(\triangle S)} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} &= \mathrm{rot}\,\vec{v}\,\triangle S \\ \mathrm{rot}\,\vec{v} &= \lim_{\triangle S \to 0} \frac{\triangle \vec{S}}{(\triangle S)^2} \oint_{C(\triangle S)} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}\,. \end{aligned}$$

D.h. die Rotation beschreibt lokal die Verwirbelung eines Vektorfeldes. Sie analysiert den 'Grad der Wegabhängigkeit' des Feldes in einem Raumpunkt

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = 0\ .$$

3. Das Green'sche Theorem[4] ist ein wesentliches Hilfsmittel zur Formulierung von Randbedingungen in der Potentialtheorie. Sind ϕ und ψ Skalarfelder und V ein durch die Fläche $S(V)$ begrenztes Volumen, so gilt

$$\oint_{S(V)} [\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi] \cdot \mathrm{d}\,\vec{s} = \iiint_V [\phi \triangle \psi - \psi \triangle \phi]\ \mathrm{d}\,V\ .$$

Das Green'sche Theorem enthält den Satz von Gauß, wenn man $\phi = 1, \vec{v} = \nabla \psi$ substituiert.

[3]Sir George Gabriel Stokes: ∗ 13.8.1819 Skreen (Irland), † 1.2.1903 Cambridge. Professor für Mathematik in Cambridge. Wichtige Arbeiten in Physik.

[4]George Green: ∗ 17.7.1793 Nottingham, † 31.3.1841 Sneinton. Zunächst Bäcker, unterrichtete Green später am Cajus College in Cambridge. Hauptwerk: 'Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism' (1828).