Theoretische Physik II für das Lehramt L3, SS2003, Prof. H.J. Lüdde

Lösungen - Kapitel III Zeitabhängiges elektromagnetisches Feld

1

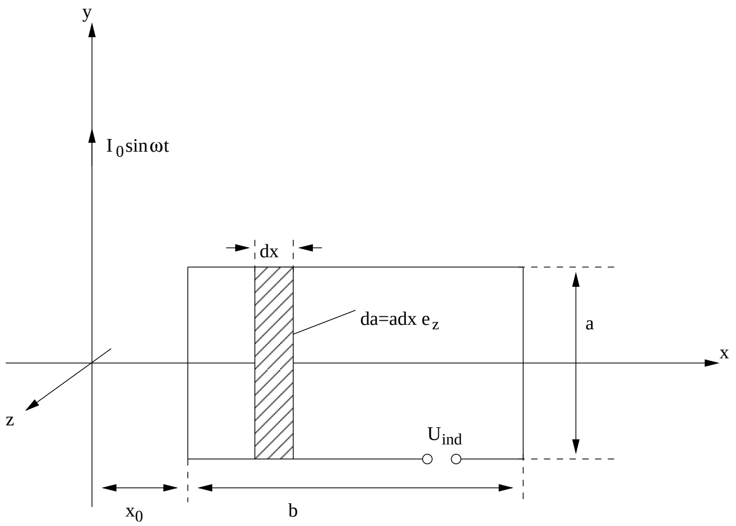
Das Induktionsgesetz liefert

$$U_{ind} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint\limits_A \vec{B}d\vec{a} \ .$$

Das Magnetfeld, das von dem stromdurchflossenen Draht erzeugt wird, ist allgemein

$$\vec{B} = \frac{2I(t)}{cx}\vec{e}_\varphi \ ,$$

wenn man Zylinderkoordinaten ρ, φ in der x-z-Ebene einführt und die Winkelzählung an der positiven z-Achse beginnen lässt.



Es gilt:

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_z \sin\varphi + \vec{e}_x \cos\varphi \ .$$

Die Schleife liegt in der x-ρ-Ebene, d.h. bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$, damit ist

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_z$$

und

$$\vec{B}_{Schleife} = -\frac{2I(t)}{cx}\vec{e}_z \ .$$

Da das Magnetfeld nur von der Koordinate x anhängt, kann man das Oberflächenintegral vereinfachen, indem man für

$$d\vec{a} = adx\vec{e}_z$$

wählt. Es folgt also

$$\begin{aligned} U_{ind} &= -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_0+b}\left(-\frac{2I(t)}{cx}\vec{e}_z\right)\vec{e}_z a dx \\ &= \frac{2a}{c^2}\frac{d}{dt}I(t)\int_{x_0}^{x_0+b}\frac{dx}{x} \\ &= \frac{2a\omega}{c^2}I_0\cos\omega t\ln\frac{x_0+b}{x_0}\ . \end{aligned}$$

2

Farradaysches Induktionsgesetz:

$$U_{ind} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\oint \vec{B}d\vec{a}\ .$$

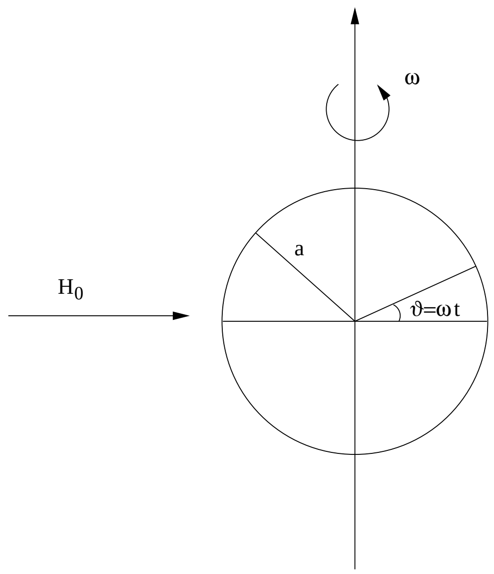
$\vec{B}$ ist zeitlich konstant und somit ist die induzierte Spannung im Draht gleich

$$U_{ind} = -\frac{\vec{B}}{c}\frac{d}{dt}\oint d\vec{a} = -\frac{\vec{B}}{c}\frac{d}{dt}\oint \vec{s}\times\vec{v}dt = -\frac{\vec{B}}{c}(\vec{s}\times\vec{v}) = -\frac{\vec{s}}{c}(\vec{v}\times\vec{B})\ .$$

3

Bei Rotation mit Winkelgeschwindigkeit ω wird im Leiter eine cosinus-förmige Spannung induziert (Fläche $A = \pi a^2$)

$$V = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}H_0 A\sin\omega t = -\frac{H_0\pi a^2\omega}{c}\cos\omega t\ .$$



Besitzt der Ring die Selbstinduktivität L und den Ohmschen Widerstand R, so ist seine Impedanz (Scheinwiderstand)

$$z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \ .$$

Der Strom hat dann die Form

$$I = \frac{\pi a^2 H_0 \omega}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \delta) \ .$$

δ ist dabei der sog. Phasenwinkel, der den Unterschied in der Schwingung von Spannung und Stromstärke angibt. Die Differentialgleichung

$$RI + L\frac{dI}{dt} = V_0 e^{i\omega t}$$

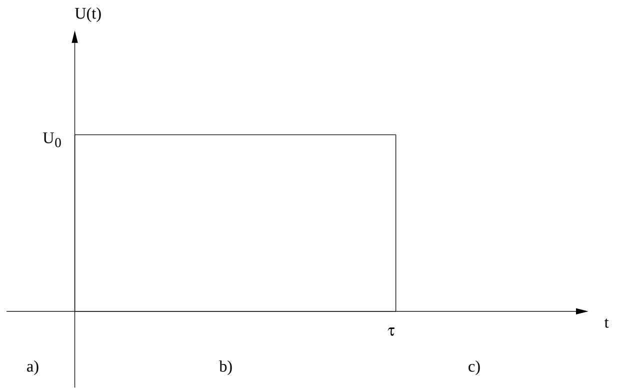
war zu lösen.

4

Die Spannung des Stromkreises ist gegeben durch die Spannung am Widerstand und die am Kondensator

$$U(t) = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} \ ,$$

wenn q die Ladung der Kondensatorplatten ist. Die Spannung hat den Verlauf: Unterteilung in 3 Regionen:



a) $t < 0$
vor Anlegen der Spannung ($I = 0$):

$$U_R = 0 \ .$$

b) $0 \leq t \leq \tau$
Form der Differentialgleichung: $R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = U_0$
Lösung mit $q = ke^{-\alpha t} + A$
liefert $q(t) = ke^{-\frac{t}{RC}} + CU_0$
für $t = 0$, $q = 0$ folgt $k = -CU_0$

$$U_R = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \ .$$

c) $t > \tau$
$q = k' e^{-\frac{t}{RC}}$ bestimmt k' aus $t = \tau$ gemäß
$k' e^{-\frac{\tau}{RC}} = -CU_0 e^{-\frac{\tau}{RC}} + CU_0$ zu
$k' = -CU_0 + CU_0 e^{-\frac{\tau}{RC}} = CU_0 \left[e^{-\frac{\tau}{RC}} - 1\right]$
Damit ist die Spannung
$$U_R = U_0 \left[e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t-\tau}{RC}}\right] .$$

5

Zur Bestimmung des elektrischen Feldes unterscheidet man zwei Fälle.

a) $r < R$
der Abstand von der Zylinderachse ist kleiner als der Zylinderradius: magnetischer Fluss durch den Kreis mit Radius r:
$$\phi_B = B\pi r^2$$
und mit dem Induktionsgesetz
$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\phi_B$$
folgt
$$E \cdot 2\pi r^2 = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\phi_B = -\frac{1}{c}\pi r^2 \frac{d}{dt} B$$
und schließlich
$$E = -\frac{r}{2c}\frac{dB}{dt}$$

b) $r > R$
der Abstand von der Zylinderachse ist größer als der Zylinderradius: Aus
$$\phi_B = B\pi R^2$$
folgt unmittelbar
$$E = -\frac{R^2}{2cr}\frac{dB}{dt} .$$

6

Aus dem Ausdruck für die Kapazität des Kondensators
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon}{4\pi}\frac{F}{d}$$
bestimmt man den Strom
$$I = \frac{d}{dt}\left(\frac{UF}{4\pi d}\right) .$$

Nun verwendet man das Amperesche Gesetz in der Form

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} I \ .$$

Man erhält innerhalb des Kondensators ($r < R$)

$$\begin{aligned} B 2\pi r &= \frac{1}{c}\pi r^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{U}{d}\right) \\ B &= \frac{r}{2cd}\omega U_0 \cos\omega t \end{aligned}$$

und außerhalb ($r > R$)

$$\begin{aligned} B 2\pi r &= \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\pi R^2 \frac{U_0}{d}\sin\omega t\right) \\ B &= \frac{R^2\omega}{2rcd} U_0 \cos\omega t \ . \end{aligned}$$

7

Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{H}$ kann man aus den Potentialen $(\phi, \vec{A})$ berechnen, die den Wellengleichungen (d'Alembert-Operator: $\Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$)

$$\begin{aligned} \triangle\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} &= \Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J} \\ \triangle\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi &= \Box\phi = -4\pi\rho \end{aligned}$$

genügen, mit

$$\begin{aligned} \vec{J} &= J_0 \exp(i\omega t)\delta(x)\vec{e}_z \\ \rho &= \rho_0 = \text{const.} \ . \end{aligned}$$

$\rho = \rho_0$ folgt aus $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0$ (Kontinuitätsgleichung). Die allgemeine Lösung der Wellengleichung hat die Form

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{A}_0 + \vec{A}_s \\ \phi &= \phi_0 + \phi_s \ . \end{aligned}$$

$(\phi_0, \vec{A}_0)$ sind Lösungen der homogenen Wellengleichung und $(\phi_s, \vec{A}_s)$ spezielle Lösungen der inhomogenen Wellengleichung. Für die angegebene Stromdichte existiert nur die z-Komponente von $\vec{A}_s$, die durch die Translationsinvarianz in der y-z-Ebene lediglich von der x-Koordinate und von der Zeit abhängt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_{z,s}(x,t) = -\frac{4\pi}{c} J_0 \exp(i\omega t)\delta(x) \ .$$

Ansatz:

$$A_{z,s}(x,t) = \exp(i\omega t) \int \frac{dp}{2\pi} e^{-ipx} A(p) \ .$$

Mit der Fourierdarstellung der δ-Funktion

$$\delta(x) = \int \frac{dp}{2\pi} e^{-ipx}$$

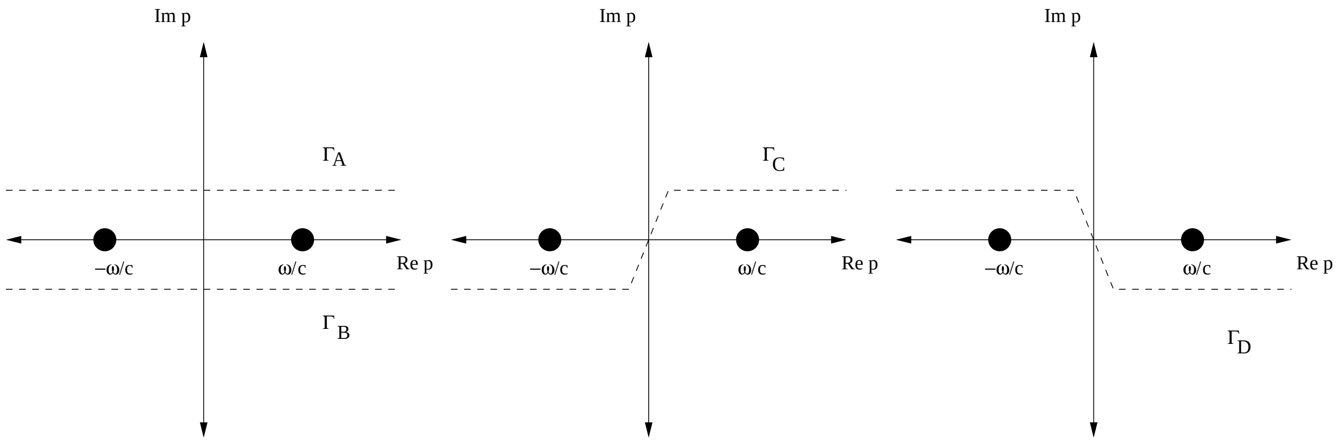
liefert dies

$$\begin{aligned} \left(p^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) A(p) &= \frac{4\pi}{c} J_0 \\ A(p) &= \frac{4\pi}{c} \frac{J_0}{p^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \ . \end{aligned}$$

Die Funktion $A(p)$ hat Pole bei $p = \pm\frac{\omega}{c}$. Bei der Ausführung des Fourierintegrals sind diese durch Deformation des Integrationsweges geeignet zu umgehen. Das Integral

$$A_{z,s}(x,t) = \frac{4\pi}{c} J_0 \exp(i\omega t) \int\limits_{\Gamma_{A,B,C,D}} \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - k^2} \quad , \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \ .$$

kann durch Anwendung des Residuensatzes berechnet werden, wofür die Kontur aber noch zu schließen ist. Entsprechend dem Verhalten der Exponentialfunktion ist die Kontur für $x > 0$ in der unteren Halbebene bzw. für $x < 0$ in der oberen Halbebene zu schließen (vergleiche mit der Diskussion der zeitabhängigen Greensfunktion).



Man erhält

$$\begin{aligned} \Gamma_A \quad &: \quad A_{z,s}(x,t) = \Theta(x) \frac{2\pi i}{\omega} J_0 \left(\exp[i(\omega t + kx)] - \exp[i(\omega t - kx)]\right) \\ \Gamma_B \quad &: \quad A_{z,s}(x,t) = \Theta(-x) \frac{2\pi i}{\omega} J_0 \left(\exp[i(\omega t - kx)] - \exp[i(\omega t + kx)]\right) \\ \Gamma_C \quad &: \quad A_{z,s}(x,t) = -\Theta(x) \frac{2\pi i}{\omega} J_0 \exp[i(\omega t - kx)] - \Theta(-x) \frac{2\pi i}{\omega} J_0 \exp[i(\omega t + kx)] \end{aligned}$$

und entsprechendes für Γ_D. Lösung A bzw. B beschreibt eine stehende Welle für $x > 0$ bzw. $x < 0$, Lösung C beschreibt eine Welle, die sich für $x > 0$ und $x < 0$ von der Wand wegbewegt. Die Lösung für ϕ erhält man analog. Die Felder erhält man aus ($\mu = 1$)

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\,.\end{aligned}$$

Setzt man $\phi_0 = 0$ und $\vec{A}_0 = 0$, so erhält man z.B. im Falle C

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \begin{cases} \frac{2\pi}{c} J_0 \exp[i(\omega t - kx)]\vec{e}_y & \text{für } x > 0 \\ -\frac{2\pi}{c} J_0 \exp[i(\omega t + kx)]\vec{e}_y & \text{für } x < 0 \end{cases} \\ \vec{E} &= \begin{cases} -\frac{2\pi}{c} J_0 \exp[i(\omega t - kx)] & \text{für } x > 0 \\ -\frac{2\pi}{c} J_0 \exp[i(\omega t + kx)] & \text{für } x < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

8

Mit der Zeitabhängigkeit der Felder $e^{i\omega t}$ erhält man aus den Maxwell-Gleichungen die Beziehungen:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{H} &= i\frac{\omega}{c}\vec{E} \\ \operatorname{rot}\vec{E} &= -i\frac{\omega}{c}\vec{H} \\ \operatorname{div}\vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div}\vec{H} &= 0\,.\end{aligned}$$

Bildet man die Rotation der ersten beiden Gleichungen und berücksichtigt die unteren beiden Gleichungen, so erhält man die separierten Wellengleichungen ($\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \triangle\vec{F}$)

$$\begin{aligned}\triangle\vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} &= 0 \\ \triangle\vec{H} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{H} &= 0\,.\end{aligned}$$

Die längs des Rohres laufenden Wellen hängen von z wie $\exp(-ikz)$ ab. Damit lauten die zu lösenden Gleichungen in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right)\vec{E} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right)\vec{H} &= 0\,.\end{aligned}$$

a) TE-Wellen ($E_z = 0$), zu lösen ist ($\operatorname{rot}\vec{E} = 0$):

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0\,.$$

Die Randbedingungen in kartesischen Koordinaten sind:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \text{ für } y=0 \text{ und } y=b \\ E_y &= 0 \text{ für } x=0 \text{ und } x=a\,. \end{aligned}$$

Die Lösungen der Wellengleichung für $\vec{E}$ lauten daher

$$\begin{aligned} E_x &= C\frac{a}{n}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t-kz)} \\ E_y &= -C\frac{b}{m}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t-kz)} \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$\frac{\omega^2}{c^2}-k^2=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\,.$$

Die Grenzfrequenz ist somit

$$\omega_g(n,m)=\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}\,.$$

Die magnetische Feldstärke folgt nun aus $\operatorname{rot}\vec{H}=i\frac{\omega}{c}\vec{E}$ zu

$$\begin{aligned} H_x &= C\frac{b}{m}\frac{ck}{\omega}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t-kz)} \\ H_y &= C\frac{a}{n}\frac{ck}{\omega}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t-kz)} \\ H_z &= -\frac{i\pi Cc}{\omega}\left(\frac{nb}{ma}+\frac{ma}{nb}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t-kz)}\,. \end{aligned}$$

Das Magnetfeld erfüllt die Randbedingungen $\vec{H}_z=0$, d.h.

$$\begin{aligned} H_x &= 0 \text{ für } x=0 \text{ und } x=a \\ H_y &= 0 \text{ für } y=0 \text{ und } y=b\,. \end{aligned}$$

b) TM-Wellen ($H_z=0$):
Da $H_z=0$ beginnt man die Rechnung mit $\vec{H}$. Der Lösungsweg verläuft ansonsten parallel. Man erhält

$$\begin{aligned} H_x &= C\frac{a}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t-kz)} \\ H_y &= -C\frac{b}{m}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t-kz)} \\ H_z &= 0 \end{aligned}$$

und aus $\vec{E}=-i\frac{c}{\omega}\operatorname{rot}\vec{H}$

$$\begin{aligned} E_x &= -C\frac{b}{m}\frac{ck}{\omega}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t-kz)} \\ E_y &= -C\frac{a}{n}\frac{ck}{\omega}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t-kz)} \\ E_z &= -\frac{i\pi Cc}{\omega}\left(\frac{nb}{ma}+\frac{ma}{nb}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t-kz)}\,. \end{aligned}$$

9

Der Strom erzeugt ein Magnetfeld in Richtung der z-Achse. Dies erzeugt nach dem Induktionsgesetz seinerseits ein elektrisches Ringfeld E_φ und damit eine Stromdichte $j_\varphi(r) = \sigma E_\varphi$ in dem Zylindermetall der Leitfähigkeit σ. Dieser Vorgang wird beschrieben durch die Maxwell-Gleichungen

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{1}$$

und

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\ . \tag{2}$$

In Gleichung (1) wurde dabei der Verschiebestrom $\frac{1}{r}\dot{\vec{D}}$ vernachlässigt. Das ist erlaubt, solange

$$\frac{\omega}{c}\epsilon\vec{E} \ll \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E}$$

oder aber $\omega \ll \sigma$ bleibt. Da die metallische Leitfähigkeit σ von der Größenordnung $10^{16}\ s^{-1}$ ist, wird diese Beziehung gut erfüllt, solange ω weit unterhalb von Röntgenfrequenzen bleibt. Mit $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ können wir in Gleichung (2) $\vec{E}$ durch $\vec{j}$ ersetzen:

$$\mathrm{rot}\,\vec{j} = -i\omega\frac{\sigma\mu}{c}\vec{H}\ . \tag{3}$$

Mit Hilfe von (1) folgt daraus durch Rotationsbildung

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{j} = \alpha^2\vec{j} \tag{4}$$

mit der Abkürzung

$$\alpha^2 = -i\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}\ . \tag{5}$$

Nach Lösung der Differentialgleichung (4) können wir dann aus Gleichung (3) das Magnetfeld

$$\vec{H} = \frac{4\pi}{c\alpha^2}\,\mathrm{rot}\,\vec{j} \tag{6}$$

entnehmen. Da $\vec{j}$ nur eine Komponente $j_\varphi(r)$ besitzt, hat $\vec{H}$ nur eine Komponente $H_z(r)$. Daher reduzieren sich die Gleichungen (4) und (6) auf

$$-\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rj_\varphi)\right] = \alpha^2 j_\varphi \tag{7}$$

und

$$H_z = \frac{4\pi}{c\alpha^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rj_\varphi)\ . \tag{8}$$

In ausführlicher Schreibweise lautet Gleichung (7)

$$j_\varphi'' + \frac{1}{r}j_\varphi' + \left(\alpha^2 - \frac{1}{r^2}\right)j_\varphi = 0\ . \tag{9}$$

Das ist eine Besselsche Differentialgleichung, deren bei $r = 0$ reguläre Lösung

$$j_\varphi(r) = j_0 J_1(\alpha r) \tag{10}$$

ist. Daraus leiten wir mit Hilfe von Gleichung (8) für das Magnetfeld

$$H_z = \frac{4\pi}{c\alpha^2} j_0 J_0(\alpha r) \tag{11}$$

ab. Die Konstante j_0 bestimmen wir aus der Forderung, dass an der Oberfläche $r = R$ des Metallzylinders das Magnetfeld den Wert

$$H_0 = \frac{4\pi}{c} nI \tag{12}$$

haben muss. Vergleich von (11) bei $r = R$ und (12) ergibt

$$j_0 = \alpha \frac{nI}{J_0(\alpha R)} \tag{13}$$

und daher die Endformeln

$$j_\varphi(r) = nI\alpha \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} \tag{14}$$

und

$$H_z(r) = \frac{4\pi}{c} nI \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} \; . \tag{15}$$

Die Bessel-Funktionen haben nach (5) ein komplexes Argument,

$$\alpha = \frac{1-i}{\lambda} \tag{16}$$

mit der charakteristischen Länge

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}} \; , \tag{17}$$

die ähnlich auch in der Theorie des *Skineffektes* auftritt (beachte beim Vergleich mit (5): $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$). Für $r \gg \lambda$ können wir asymptotische Darstellungen verwenden. Eine entsprechende Rechnung ergibt für den Wirbelstrom

$$j_\varphi(r) = \frac{nI}{\lambda} \sqrt{2} e^{(r-R)/\lambda} \exp\left(\frac{i\pi}{4} + i \frac{R-r}{\lambda} \right) \tag{18}$$

und für das Magnetfeld

$$H_z(r) = \frac{4\pi}{c} nI e^{(r-R)/\lambda} e^{i(R-r)/\lambda} \; . \tag{19}$$

Die Gleichungen (18) und (19) besagen, daß die Wirbelströme vorwiegend in einer Oberflächenschicht der Dicke λ fließen und das Magnetfeld aus dem Inneren in diese Oberflächenschicht verdrängen. Der Phasenfaktor $\exp[i(R-r)/\lambda]$ gekoppelt mit der Zeitabhängigkeit von I wie $e^{i\omega t}$ bedeutet, dass j_φ und H_z mit der Geschwindigkeit

$$\frac{dr}{dt} = \omega\lambda = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\mu\sigma}} c \ll c \tag{20}$$

ins Innere des Zylinders eindringen. Bei $r = 0$ ist nach (14) $j_\varphi(0) = 0$, aber das Magnetfeld behält einen endlichen, wenn auch kleinen Wert.

10

Wie in der vorhergehenden Aufgabe können wir die Differentialgleichung

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{j} = \alpha^2\vec{j}$$

mit

$$\alpha = \frac{1-i}{\lambda} \;\; ; \;\; \lambda = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}$$

für die Wirbelstromdichte $\vec{j}$ und die Formel

$$\vec{H} = \frac{4\pi}{c\alpha^2}\operatorname{rot}\vec{j}$$

für das magnetische Feld zugrundelegen. Bei dieser Anordnung der beiden Leiter erzeugen die in z-Richtung fließenden Ströme $\pm I$ ohne Metallblock das homogene Magnetfeld

$$H_0 = \frac{2\pi}{b}\frac{I}{c}$$

in x-Richtung in dem Bereich $-d/2 < y < +d/2$ zwischen den beiden Blättern der Breite $2b$. Dieses magnetische Wechselfeld erzeugt nach dem Induktionsgesetz ein elektrisches Feld $\vec{E}$, das den Wirbelstrom der Dichte $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ hervorruft. Wie in der vorigen Aufgabe hat $\vec{j}$ die Richtung der primären Ströme (dort φ, hier z) und sowohl $\vec{j}$ als auch $\vec{H}$ hängen vom Abstand von den Leitern ab (dort r, hier y). Wir erhalten daher ein Magnetfeld $H_x(y)$ und eine Stromdichte $j_z(y)$. Dann vereinfacht sich die obige Gleichung für $\vec{H}$ zu

$$H_x = \frac{4\pi}{c\alpha^2}\frac{dj_z}{dy}$$

und die Differentialgleichung entsprechend zu

$$\frac{d^2 j_z}{dy^2} + \alpha^2 j_z = 0\;.$$

Die Lösung

$$j_z(y) = j_0 \sin\alpha y$$

führt auf

$$H_x(y) = \frac{4\pi}{c\alpha} j_0 \cos\alpha y\;.$$

Sie erfüllt die Randbedingung $H_x(\pm d/2) = H_0$, wenn

$$j_0 = \frac{c\alpha}{4\pi}\frac{H_0}{\cos\alpha d/2}$$

gesetzt wird. Damit können wir die Lösung in der Form

$$j_z(y) = \frac{c}{4\pi} H_0 \alpha \frac{\sin\alpha y}{\cos\alpha d/2} \tag{1}$$

und

$$H_x(y) = H_0 \frac{\cos \alpha y}{\cos \alpha d/2} \tag{2}$$

aufschreiben. Hier ist noch der komplexe Parameter α verwendet. Zerlegen wir ihn in Real- und Imaginärteil, so wird

$$\begin{aligned} \sin \alpha y &= \sin \frac{y}{\lambda} \cosh \frac{y}{\lambda} - i \cos \frac{y}{\lambda} \sinh \frac{y}{\lambda} \\ \cos \alpha y &= \cos \frac{y}{\lambda} \cosh \frac{y}{\lambda} + i \sin \frac{y}{\lambda} \sinh \frac{y}{\lambda} \ . \end{aligned}$$

Setzen wir wie in der vorhergehenden Aufgabe wieder $\lambda \ll d$ voraus, so fließen die Wirbelströme vorwiegend in einer dünnen Oberflächenschicht der Dicke λ, in der auf der Seite positiver y

$$\sinh \frac{y}{\lambda} \approx \cosh \frac{y}{\lambda} \approx \frac{1}{2} e^{y/\lambda}$$

wird. Die Gleichungen (1) und (2) können daher für $y > 0$ genähert

$$j_z(y) = \frac{c}{4\pi} H_0 \frac{\sqrt{2}}{\lambda} e^{(y-d/2)/\lambda} e^{i(y-d/2)/\lambda} e^{-3\pi i/4} \tag{3}$$

und

$$H_x(y) = H_0 e^{(y-d/2)/\lambda} e^{i(y-d/2)/\lambda} \tag{4}$$

geschrieben werden. Entsprechendes gilt für negative y: Nach Gleichung (1) hat j_z dort das entgegengesetzte, und nach (2) H_x das gleiche Vorzeichen. Beachten wir, dass H_0 wie I proportional zu $e^{i\omega t}$ ist, so enthalten beide Formeln einen Phasenfaktor

$$\exp i \left[\frac{1}{\lambda} \left(y - \frac{d}{2} \right) + \omega t \right] \ .$$

Das bedeutet eine Eindringgeschwindigkeit der Felder ins Innere des Metallblocks, die $dy/dt = -\omega\lambda$ ist, wie in Gleichung (20) der vorherigen Aufgabe.

11

Der Energieverlust wird durch die allgemeine Formel

$$-\frac{dW}{dt} = \int d\tau (\vec{j}\vec{E})$$

beschrieben. Mit $\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{j}$ können wir dafür schreiben

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\sigma} \int d\tau \vec{j}^2 \ .$$

Für periodisch veränderliches $\vec{j}$ gilt daher im Zeitmittel einer Periode

$$-\frac{\overline{dW}}{dt} = \frac{1}{\sigma} \int d\tau \overline{\vec{j}^2} \ .$$

Nach Gleichung (3) der vorhergehenden Aufgabe ist nun

$$|\vec{j}|^2 = \left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 |H_0|^2 \frac{2}{\lambda^2} e^{(2y-d)/\lambda} = \frac{|I|^2}{2b^2\lambda^2} e^{(2y-d)/\lambda} \ . \tag{1}$$

Mit

$$\overline{\vec{j}^2} = \frac{1}{2}|\vec{j}|^2 \ ; \ \overline{I^2} = \frac{1}{2}|I|^2$$

und

$$d\tau = 2b \cdot l \cdot dy$$

wird also der mittlere Energieverlust im Gebiet $0 \leq y \leq d/2$

$$\frac{2b \cdot l}{\sigma} \int_0^{d/2} dy \frac{\overline{I^2}}{2b^2\lambda^2} e^{(2y-d)/\lambda} = \frac{l}{2\sigma b \lambda} \overline{I^2} \left(1 - e^{-d/\lambda}\right) \ . \tag{2}$$

Da in (1) bereits vorausgesetzt wurde, dass $d \gg \lambda$ ist, können wir die Klammer in gleicher Näherung durch 1 ersetzen. Für den ganzen Metallblock $-d/2 \leq y \leq +d/2$ ergibt sich das Doppelte von (2). Unser Ergebnis ist daher

$$\overline{\frac{dW}{dt}} = \frac{l}{\sigma b \lambda} \overline{I^2} \ .$$

12

Wir setzen $\vec{H}$ und $\vec{E}$ proportional zu $e^{i\omega t}$ an; dann lauten die beiden Ausgangsgleichungen (mit $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ und $\vec{B} = \mu\vec{H}$)

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E} + i\omega\frac{\epsilon}{c}\vec{E} \ ; \ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -i\omega\frac{\mu}{c}\vec{H} \ .$$

Mit den Abkürzungen

$$\frac{4\pi\sigma}{\omega} = \xi \ ; \ \frac{\omega}{c} = k$$

dann entsprechend

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \xi\vec{E} + i\epsilon k\vec{E} \ ; \ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -i\mu k\vec{H} \ .$$

Das Kabel, dessen Oberfläche die y-z-Ebene ist, soll in z-Richtung von einem hochfrequenten Wechselstrom durchflossen werden. Das Feld zerfällt in ein TM-System mit E_z, E_x, H_y und ein TE-System mit H_z, H_x, E_y. Die Ausgangsgleichungen lauten in kartesischen Komponenten

$$\begin{aligned} \partial_y H_z - \partial_z H_y &= k(\xi + i\epsilon)E_x \\ \partial_z H_x - \partial_x H_z &= k(\xi + i\epsilon)E_y \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x &= k(\xi + i\epsilon)E_z \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_y E_z - \partial_z E_y &= -i\mu k H_x \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z &= -i\mu k H_y \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x &= -i\mu k H_z \end{aligned}$$

Wegen des Verschwindens aller Ableitungen nach y zerfallen diese Gleichungen in das TM-System

$$\begin{aligned} -\partial_z H_y &= k(\xi + i\epsilon) E_x && (1) \\ \partial_x H_y &= k(\xi + i\epsilon) E_z && (2) \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z &= -i\mu k H_y && (3) \end{aligned}$$

und das TE-System

$$\begin{aligned} \partial_z H_x - \partial_x H_z &= k(\xi + i\epsilon) E_y \\ -\partial_z E_y &= -i\mu k H_x \\ \partial_x E_y &= -i\mu k H_z \ . \end{aligned}$$

Wir verfolgen nur das TM-System weiter. Hier gestatten die Gleichungen (1) und (2) die Berechnung der elektrischen Feldkomponenten aus H_y. Setzt man sie in (3) ein, so entsteht für H_y die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + K k H_y = 0 \ , \tag{4}$$

in der

$$i\mu k(\xi + i\epsilon) = K \ ; \ \xi = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

bedeuten. Gleichung (4) gilt in dieser Form für $x > 0$, also im Inneren des Leiters. Außerhalb, für $x < 0$, ist K in (4) durch k zu ersetzen. Wir suchen nun Lösungen von (4) , die für $|x| \to \infty$ verschwinden und bei $x = 0$ stetig sind. Diese Lösungen lauten

$$H_y = C e^{i(\omega t - pz)} \begin{cases} e^{-\lambda_i x} & \text{für } x > 0 \\ e^{\lambda_a x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \sqrt{p^2 - kK} \ ; \quad \mathrm{Re}\lambda_i > 0 \\ \lambda_a &= \sqrt{p^2 - k^2} \ ; \quad \mathrm{Re}\lambda_a > 0 \ . \end{aligned}$$

Damit die in z-Richtung fortschreitende Welle gedämpft ist, muss außerdem

$$\mathrm{Im} p < 0$$

werden. Die aus (1) und (3) folgenden Komponenten der elektrischen Feldstärke werden jetzt

$$E_x = -\frac{1}{k(\xi + i\epsilon)} \partial_z H_y = \begin{cases} \frac{p\mu}{K} H_y & \text{für } x > 0 \\ \frac{p}{k} H_y & \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{5}$$

und

$$E_z = \begin{cases} +\frac{i\mu}{K} \lambda_i H_y & \text{für } x > 0 \\ -\frac{i}{k} \lambda_a H_y & \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{6}$$

Die Stromdichte senkrecht zur Oberfläche ist

$$s_x = \left(\sigma + \epsilon \frac{i\omega}{4\pi}\right) E_x = \frac{i\omega K}{4\pi\mu k} E_x$$

im Inneren, während außerhalb nur der Verschiebungsstrom $s_x = \frac{i\omega E_x}{4\pi}$ existiert. Mit den Werten von (5) mit stetigem H_y bei $x = 0$ sieht man sofort, dass dort beide Größen übereinstimmen, der Strom also stetig durch die Oberfläche hindurchtritt. Die Stetigkeit der Tangentialkomponente E_z führt nach (6) auf

$$\frac{\mu}{K}\lambda_i = -\frac{1}{k}\lambda_a \ ,$$

woraus mit den Definitionen für λ_i und λ_a

$$p^2 = k^2 \frac{K(\mu^2 k - K)}{\mu^2 k^2 - K^2}$$

folgt.