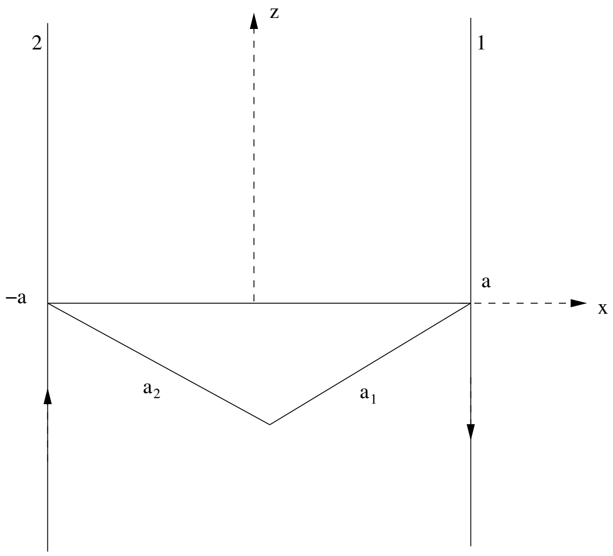
Theoretische Physik II für das Lehramt L3, SS2003, Prof. H.J. Lüdde

Lösungen - Kapitel II Magnetostatik

1

Wähle das Koordinatensystem so, dass die Leiter in der x-z-Ebene liegen und die Ströme parallel zur z-Achse fließen.



Die zu betrachtenden Feldpunkte liegen dann in der x-y-Ebene:

$$\vec{r} = (x, y, 0) \ .$$

Die Leiterelemente haben die Positionen

$$\begin{aligned} \vec{r}_1' &= (a, 0, z') \text{ auf Leiter 1} \\ \vec{r}_2' &= (-a, 0, z') \text{ auf Leiter 2} \ . \end{aligned}$$

Die Abstände des Feldpunktes $\vec{r}$ von den Leitern sind

$$\begin{aligned} a_1 &= [(x-a)^2 + y^2]^{1/2} \text{ von Leiter 1} \\ a_2 &= [(x+a)^2 + y^2]^{1/2} \text{ von Leiter 2} \ . \end{aligned}$$

Da die Ströme parallel zur z-Achse fließen, haben wir

$$A_z = \frac{i}{c}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{[z'^2 + a_2^2]^{1/2}} - \frac{i}{c}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{[z'^2 + a_1^2]^{1/2}}$$

für das Vektorpotential. Für beide Integrale gilt $\int_0^\infty = \int_\infty^0$, so dass

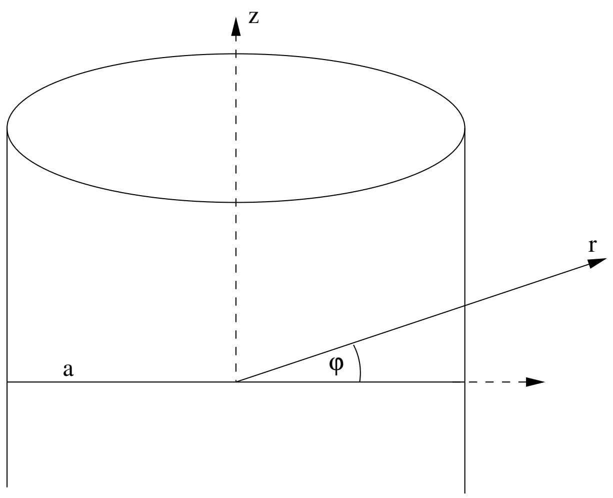
$$\begin{aligned} A_z &= \frac{2i}{c}\left(\int_0^\infty \frac{dz'}{[z'^2+a_2^2]^{1/2}} - \int_0^\infty \frac{dz'}{[z'^2+a_1^2]^{1/2}}\right) \\ &= \frac{2i}{c}\left[\ln\left(z'+\sqrt{z'^2+a_2^2}\right) - \ln\left(z'+\sqrt{z'^2+a_1^2}\right)\right]_0^\infty \\ &= -\frac{2i}{c}\ln\frac{a_2}{a_1} = -\frac{i}{c}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} \; . \end{aligned}$$

Das $\vec{B}$-Feld berechnet sich nach $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ zu:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{2i}{c}\frac{y}{a_1 a_2}(a_1 - a_2) \\ B_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{2i}{c}\left(\frac{a-x}{a_1} + \frac{a+x}{a_2}\right) \\ B_z &= 0 \; . \end{aligned}$$

2

Der Strom soll in z-Richtung fließen.



Die Stromdichte ist

$$\vec{j} = \frac{\vec{i}}{\pi a^2} = \left(0, 0, \frac{i}{\pi a^2}\right) \; .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \triangle A_x &= 0 \\ \triangle A_y &= 0 \\ \triangle A_z &= -\frac{4\pi}{c} j \; , \end{aligned}$$

wobei $j = 0$ für $r > a$ und $j = \frac{i}{\pi a^2}$ für $r \leq a$. Aus den obigen Gleichungen erhält man $A_x = A_y = 0$ und A_z hängt nur vom Abstand r von der z-Achse ab. Daher führt man Zylinderkoordinaten ein und erhält:

$$\begin{aligned}
\triangle A_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) A_z \\
B_r &= 0 \\
B_z &= 0 \\
B_\varphi &= -\frac{\partial A_z}{\partial r} \ .
\end{aligned}$$

Man erhält für $r \leq a$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_z}{dr}\right) &= -\frac{4\pi}{c} jr \rightarrow r\frac{dA_z}{dr} = -\frac{2\pi}{c} jr^2 + C_1 \\
A_z &= -\frac{\pi}{c} jr^2 + C_1 \lg r + C_2 \\
B_\varphi &= \frac{2ir}{ca^2} - \frac{C_1}{r}
\end{aligned}$$

und für $r > a$:

$$\begin{aligned}
\frac{dA_z}{dr} &= \frac{C_3}{r} \rightarrow A_z = C_3 \lg r + C_4 \\
B_\varphi &= -\frac{C_3}{r} \ .
\end{aligned}$$

Da $\vec{B}$ für $r = 0$ endlich sein muss, folgt $C_1 = 0$. Passt man A_z und B_φ noch für $r = a$ aneinander an, so erhält man für $r \leq a$:

$$\begin{aligned}
A_z &= C - \frac{i}{c}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \\
B_\varphi &= \frac{2ir}{ca^2}
\end{aligned}$$

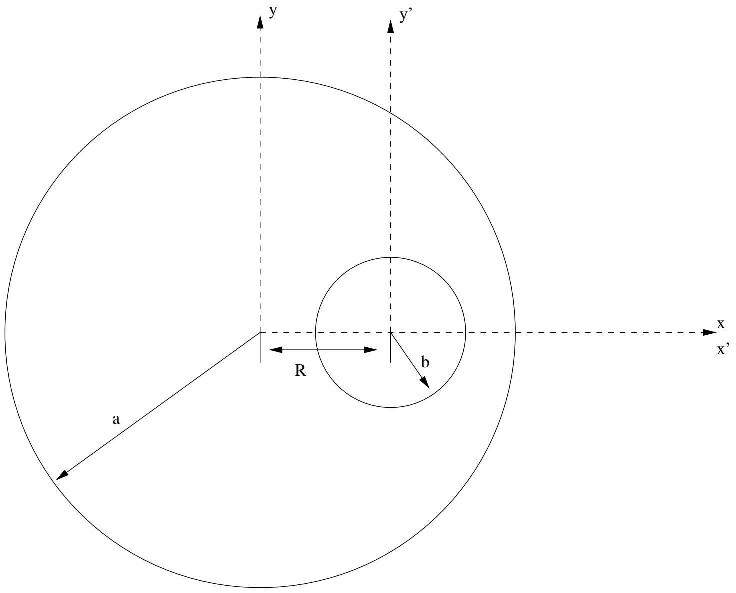
und für $r > a$:

$$\begin{aligned}
A_z &= C - \frac{i}{c}\left(1 + \lg\frac{r}{a}\right) \\
B_\varphi &= \frac{2i}{cr} \ .
\end{aligned}$$

C ist eine beliebige Konstante. Man kann das $\vec{B}$-Feld auch folgendermaßen berechnen: aus Symmetriegründen ist nur $B_\varphi \neq 0$. Integration der Beziehung $\oint \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I$ ergibt das obige Resultat.

3

Wäre im Zylinder kein Loch,



so ergäbe sich nach der vorhergehenden Aufgabe:

$$j = \frac{i}{\pi a^2} \text{ und } B_\varphi = \frac{2ir}{ca^2}$$

bzw.

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{2iy}{ca^2} = -\frac{2\pi j}{c} y \\ B_y &= \frac{2ix}{ca^2} = \frac{2\pi j}{c} x \; . \end{aligned}$$

Damit im Loch kein Strom fließt, stellt man sich vor, man habe dort noch einen entgegengesetzt fließenden gleich großen Strom, der ein $\vec{B}$-Feld

$$B_{x'} = \frac{2\pi j}{c} y' \text{ und } B_{y'} = -\frac{2\pi j}{c} x' \text{ erzeugt.}$$

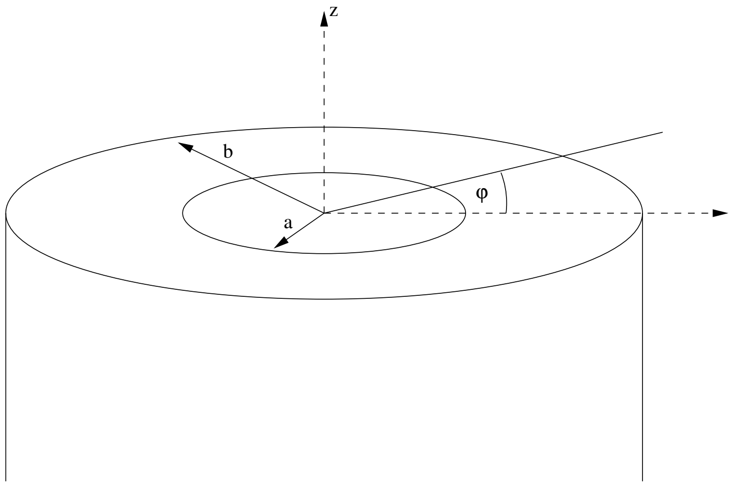
Nach dem Superpositionsprinzip erhält man mit $x - x' = R$ und $y = y'$ für das $\vec{B}$-Feld im Loch

$$\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= \frac{2\pi j}{c} R = \frac{2RI}{c(a^2 - b^2)} \; . \end{aligned}$$

I ist der totale Strom.

4

Die Stromdichte im Zylinder beträgt $j = \frac{i}{\pi a^2}$. Das $\vec{B}$-Feld besitzt Zylindersymmetrie, d.h. in Zylinderkoordinaten: $B_r = B_z = 0$ und $B_\varphi \neq 0$.



Für $r < a$ ergibt das Linienintegral $\oint \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}I$ mit $\vec{B} = B_\varphi(r)\vec{e}_\varphi$ und $d\vec{l} = rd\varphi\vec{e}_\varphi$

$$B_\varphi(r)2\pi r = \frac{4\pi}{c}\frac{i}{\pi a^2}\pi r^2 \to B_\varphi(r) = \frac{2ir}{ca^2} \; .$$

Für $a < r < b$ erhält man

$$B_\varphi(r) = \frac{2i}{cr} \; .$$

Für $r > b$ ist der vom Integrationsweg umschlossene Strom Null

$$B_\varphi(r) = 0 \; .$$

5

Im ganzen Raum gilt

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \; . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind mit der Randbedingung

$$\vec{H}(r) \to \vec{H}_0 \quad (r \to \infty)$$

zu lösen. Aus der ersten Gleichung folgt, dass $\vec{H}$ die Darstellung

$$\vec{H} = -\nabla\phi$$

mit einem skalaren Potential ϕ besitzt. Innerhalb und außerhalb der Kugel (aber nicht auf dem Rand) gilt dann (nach der zweiten Gleichung)

$$\triangle\phi = 0 \; .$$

Lösungsidee: Mache einen allgemeinen Ansatz für ϕ und bestimme die auftretenden Koeffizienten durch die Randbedingung und die Anschlussbedingung der beiden Felder auf der

Kugeloberfläche. Die allgemeinste Lösung von $\triangle\phi = 0$, die am Ursprung nicht divergiert und rotationssymmetrisch bezüglich der z-Achse ist, lautet:

$$\begin{aligned}
\phi_{aussen} &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \quad , (r > a) \\
\phi_{innen} &= \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos\theta) \quad , (r < a) \; .
\end{aligned}$$

a) Randbedingung für $r \to \infty$:

$$\phi_{aussen}(\vec{r}) \to -\vec{H}_0(\vec{r}) = -H_0 r P_1(\cos\theta) \quad , (r \to \infty).$$

Das bedeutet

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) = -H_0 r P_1(\cos\theta) \quad , (r \to \infty) \; .$$

Sortiert man diesen Ausdruck nach einzelnen P_l, so lassen sich deren Koeffizienten (wegen der linearen Unabhängigkeit der P_l) gleich Null setzen. Das führt auf

$$\begin{aligned}
A_0 &= 0 \\
A_1 &= -H_0 \\
A_l &= 0 \;\; , \;\; l = 2, 3, \ldots \\
B_l & \quad \text{beliebig} \; .
\end{aligned}$$

b) Anschlussbedingung für die Normalkomponente des $\vec{B}$-Feldes (Normalkomponente des Gradienten in Kugelkoordinaten: $\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}$)

$$\begin{aligned}
\vec{B}^n_{innen} &= \vec{B}^n_{außen} \\
\vec{B}^n_{innen} &= \mu H^n_{innen} = -\mu \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \phi_{innen} \\
\vec{B}^n_{außen} &= \vec{H}^n_{außen} = -\mu \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \phi_{außen} \; .
\end{aligned}$$

Dies führt auf

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos\theta) = \frac{\partial}{\partial r} \left[-H_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \right] \quad , (r = a) \; .$$

Analoges Vorgehen zu a) führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}
B_0 &= 0 \\
\mu C_1 + \frac{2B_1}{a^3} + H_0 &= 0 \\
\mu l C_l a^{2l+1} + (l+1) B_l &= 0 \;\; , l = 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

c) Anschlussbedingung für die Tangentialkomponente des $\vec{H}$-Feldes (Tangentialkomponente des Gradienten in Kugelkoordinaten: $-\vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$ - hat nur eine $\vec{e}_\theta$-Komponente, da $\phi_{innen/außen}$ nicht von φ abhängen)

$$\begin{aligned} \vec{H}^t_{innen} &= \vec{H}^t_{außen} \\ \vec{H}^t_{innen/außen} &= -\vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\phi_{innen/außen} \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\phi_{innen} - \phi_{außen}\right) &= 0 \quad , (r = a) \\ \phi_{innen} - \phi_{außen} &= k \quad , (r = a)\ . \end{aligned}$$

Dabei ist k eine beliebige Konstante, die nicht von θ abhängt. Einsetzen der Entwicklung für $\phi_{außen/innen}$ liefert

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos\theta) + H_0 r P_1(\cos\theta) - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) = k\ ,$$

was auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} B_0 &= (C_0 - k)a \\ B_1 &= (C_1 + H_0)a^3 \\ B_l &= C_l a^{2l+1} \quad , l = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

führt.

d) Vergleiche die beiden Gleichungssysteme in b) und c). Es folgt

$$\begin{aligned} &C_0 = k, && C_1 = -\frac{3}{\mu+2}H_0, && C_l = 0, && l = 2, 3, \ldots \\ &B_0 = 0, && B_1 = \frac{\mu-1}{\mu+2}H_0 a^3, && B_l = 0, && l = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Also kann die Lösung in der Form

$$\begin{aligned} \phi_{außen} &= -H_0 r\cos\theta + \frac{\mu-1}{\mu+2}H_0 a^3 \frac{\cos\theta}{r} \\ \phi_{innen} &= -\frac{3}{\mu+2}H_0 r\cos\theta \end{aligned}$$

geschrieben werden. Es wurde k so gewählt, dass ϕ an der Kugeloberfläche stetig ist ($k = 0$). Das Magnetfeld für $r > a$ ist also eine Überlagerung eines konstanten Feldes $\vec{H}_0$ und dem Magnetfeld eines magnetischen Dipols mit dem Dipolmoment

$$\vec{m} = \frac{\mu-1}{\mu+2}H_0 a^3\ .$$

6

Zur Berechnung des $\vec{H}$-Feldes kann man wegen der vorliegenden Symmetrie die Integralform des Ampèrschen Gesetzes verwenden:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi N i}{c} \; .$$

Integriert man über einen Kreis K_1 außerhalb der Wicklungen, so verschwindet das Integral, ebenso bei Integration über einen Kreis K_2 im inneren Raum, wo keine Wicklungen sind. Bei einem Umlauf innerhalb der Wicklungen wird jede der N Windungen einmal umschlungen, das Linienintegral beträgt daher $\frac{4\pi N i}{c}$. Das Feld beschränkt sich also auf den Raum, der umwickelt ist und hat dort den Wert

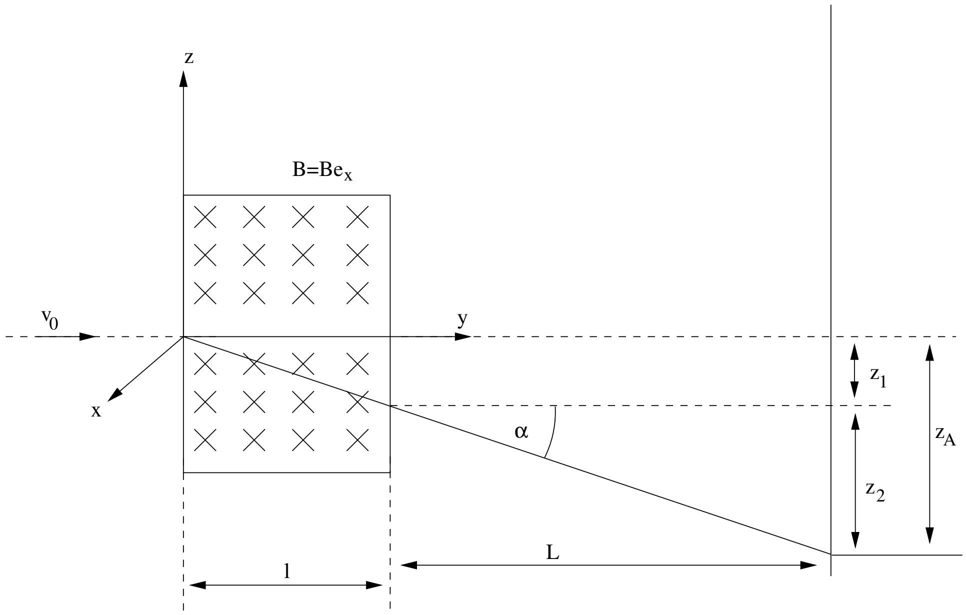
$$\begin{aligned} H = \frac{4\pi N i}{2\pi a c} = \frac{2Ni}{ac} \;\rightarrow\; B &= \mu H = \frac{2\mu N i}{ac} \\ M &= \frac{\mu - 1}{4\pi} H = \frac{\mu - 1}{4\pi}\frac{2Ni}{ac} \; . \end{aligned}$$

7

Nachdem der Elektronenstrahl die Beschleunigungsspannung U_0 durchlaufen hat, besitzt er die Geschwindigkeit

$$\vec{v}_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}} \vec{e}_y \; .$$

Die Gesamtablenkung des Elektronenstrahls setzt sich zusammen aus dem Anteil z_1, der durch die Ablenkung im Magnetfeld hervorgerufen wird und aus der Auslenkung $z_2 = L \tan\alpha$.



Die Bahnkurve eines Elektrons im Magnetfeld berechnet sich aus der Bewegungsgleichung ($c = 1$)

$$m\ddot{\vec{r}} = -eB(\dot{y}\vec{e}_z - \dot{z}\vec{e}_y)$$

zu

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \frac{v_0 m}{eB} \sin\left(\frac{eB}{m}t\right) \\ z &= \frac{v_0 m}{eB}\left[\sin\left(\frac{eB}{m}t\right) - 1\right] . \end{aligned}$$

D.h. die Bahnkurve ist ein Kreis

$$y^2 + \left(z + \frac{v_0 m}{eB}\right)^2 = \left(\frac{v_0 m}{eB}\right)^2$$

mit dem Radius $\frac{v_0 m}{eB}$ um den Punkt $M = \left(0, 0, -\frac{v_0 m}{eB}\right)$. Um die Ablenkung des Strahls berechnen zu können, löst man die obige Gleichung nach z auf

$$z = \pm\sqrt{\left(\frac{v_0 m}{eB}\right)^2 - y^2} - \frac{v_0 m}{eB}$$

(dabei interessiert nur der 'obere Teil' der Bahnkurve also '+')

$$z_1 = z(y = l) = \sqrt{\left(\frac{v_0 m}{eB}\right)^2 - l^2} - \frac{v_0 m}{eB} .$$

Berechnung von $z_2 = L \tan\alpha$:
Um $\tan\alpha$ zu bestimmen, berechne die Ableitung der Bahnkurve für $y = l$

$$\begin{aligned} \tan\alpha = \left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=l} &= \left. -\frac{y}{\left[\left(\frac{v_0 m}{eB}\right)^2 - y^2\right]^{1/2}}\right|_{y=l} \\ &= -\frac{l}{\left[\left(\frac{v_0 m}{eB}\right)^2 - l^2\right]^{1/2}} \end{aligned}$$

und somit

$$z_A = z_1 + z_2 = \left[\left(\frac{v_0 m}{eB}\right)^2 - l^2\right]^{1/2} - \frac{v_0 m}{eB} - \frac{Ll}{\left[\left(\frac{v_0 m}{eB}\right)^2 - l^2\right]^{1/2}}$$

bzw. nach Einsetzen für v_0

$$z_A = \left[\frac{2mU_0}{eB^2} - l^2\right]^{1/2} - \frac{1}{B}\left[\frac{2mU_0}{e}\right]^{1/2} - \frac{Ll}{\left[\frac{2mU_0}{eB^2} - l^2\right]^{1/2}} .$$

8

In einem dünnen Leiter gilt

$$\vec{j}d\tau = id\vec{r} = \frac{dq}{dt}d\vec{r} = dq\vec{v} \; .$$

Die Lorentzkraft auf jedes Leiterelement ist dann

$$d\vec{F} = \frac{dq}{c}(\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{i}{c}(d\vec{r} \times \vec{B})$$

bzw. die Kraft, die ein Magnetfeld $\vec{B}$ auf einen vom Strom durchflossenen Leiter ausübt

$$\vec{F} = \frac{i}{c}\int_l (d\vec{r} \times \vec{B}) \; .$$

Das Feld der Leiterschleife 2 im Punkt $\vec{r}_1$ erhält man nach Biot-Savart

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{i_2}{c}\oint \frac{d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

und das Feld der Leiterschleife 1 im Punkt $\vec{r}_2$

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{i_1}{c}\oint \frac{d\vec{r}_1 \times \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \; .$$

Damit ergibt sich für die Lorentzkraft, die Schleife 2 auf 1 ausübt

$$\vec{F}_{21} = \frac{i_1 i_2}{c^2}\oint\oint \frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

und die Kraft, die Schleife 1 auf 2 ausübt

$$\vec{F}_{12} = \frac{i_1 i_2}{c^2}\oint\oint \frac{d\vec{r}_2 \times (d\vec{r}_1 \times \vec{r}_{21})}{r_{21}^3} \; .$$

Wegen

$$\begin{aligned} d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}) &= -(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) \cdot \vec{r}_{12} + (d\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{12}) \cdot d\vec{r}_2 \\ d\vec{r}_2 \times (d\vec{r}_1 \times \vec{r}_{21}) &= -(d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1) \cdot \vec{r}_{21} + (d\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_{21}) \cdot d\vec{r}_1 \end{aligned}$$

folgt

$$\vec{F}_{21} = \frac{i_1 i_2}{c^2}\left(-\oint\oint (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \oint d\vec{r}_2 \oint \frac{d\vec{r}_1 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}\right) \; .$$

Das zweite Integral ist ein Arbeitsintegral über die Coulombkraft entlang einer geschlossenen Kurve und muss deshalb verschwinden, so dass man erhält

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} &= -\frac{i_1 i_2}{c^2}\oint\oint (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \\ &= \frac{i_1 i_2}{c^2}\oint\oint (d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1)\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \; , \text{ wegen } \vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21} \; , \; |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_{21}| \\ &= -\vec{F}_{12} \; . \end{aligned}$$

9

Das Magnetfeld eines vom Strom I durchflossenen Kreisringes (Radius a) ist nach *Biot-Savart* gegeben durch:

$$\vec{H} = \frac{I}{c} \oint \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \ .$$

Mit

$$d\vec{s} = a d\varphi(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

und

$$(\vec{r} - \vec{r}') = (x - R\cos\varphi, y - R\sin\varphi, z)$$

findet man auf der z-Achse ($x = y = 0$):

$$H_x = H_y = 0 \ \ , \ \ H_z(z) = \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\varphi}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{I}{c} \pi a^2 \frac{2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \ .$$

Ausgangspunkt zur Lösung der Aufgabe ist das obige Ergebnis, dass das Magnetfeld eines Stromkreises um die z-Achse nur eine Komponente H_z auf dieser Achse besitzt, nämlich

$$H_z = \frac{I}{c} \pi a^2 \frac{2}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \ ,$$

wenn r den Abstand vom Mittelpunkt des Stromkreises bezeichnet (vorher z). Am Punkt P der Abbildung ist dieser Abstand $r = h - z$ für den oberen und $r = h + z$ für den unteren Ring. Daher wird dort

$$H_z = \frac{2\pi I}{ca} \left\{ \left[1 + \left(\frac{h - z}{a} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\frac{h + z}{a} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} \ .$$

Wir betrachten nun die Umgebung des Mittelpunktes und führen die folgenden Abkürzungen ein

$$\frac{h}{a} = k; \quad \frac{k}{1 + k^2} = p; \quad \frac{1}{1 + k^2} = q; \quad \frac{z}{a} = \epsilon \ll 1; \ .$$

Dann wird

$$H_z = \frac{2\pi I}{ca} q^{3/2} \left[(1 - 2p\epsilon + q\epsilon^2)^{-3/2} + (1 + 2p\epsilon + q\epsilon^2)^{-3/2} \right] \ .$$

Entwicklung nach Potenzen von ϵ bis einschließlich ϵ^4 ergibt mit

$$(1 \pm x)^{-3/2} = 1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 \mp \frac{35}{16}x^3 + \frac{315}{128}x^4 \mp \dots$$

zunächst

$$\begin{aligned}
(1 - 2p\epsilon + q\epsilon^2)^{-3/2} = 1 \ \ & - \ \ \frac{3}{2}(-2p\epsilon + q\epsilon^2) + \frac{15}{8}(4p^2\epsilon^2 - 4pq\epsilon^3 + q^2\epsilon^4) \\
& - \ \ \frac{35}{16}(-8p^3\epsilon^3 + 12p^2q\epsilon^4 - 6pq^2\epsilon^5 + q^3\epsilon^6) \\
& + \ \ \frac{315}{128}(16p^4\epsilon^4 - 32p^3q\epsilon^5 + 24p^2q^2\epsilon^6 - 8pq^3\epsilon^7 + q^4\epsilon^8) - \dots \ .
\end{aligned}$$

Fügt man den entsprechenden zweiten Term der Gleichung für H_z hinzu, so fallen die ungeraden Potenzen von ϵ heraus und die geraden treten zweimal auf. Das führt auf

$$H_z = \frac{4\pi I}{ca} q^{3/2} \left\{ 1 + \left(-\frac{3}{2} q + \frac{15}{2} p^2 \right) \epsilon^2 + \left(\frac{15}{8} q^2 - \frac{105}{4} p^2 q + \frac{315}{8} p^4 \right) \epsilon^4 \right\} .$$

Ein Optimum an Feldhomogenität in der Umgebung der Stelle $\epsilon = 0$ erhalten wir offenbar, wenn der Faktor von ϵ^2 verschwindet, also für

$$q = 5p^2 \quad \text{oder} \quad k = \frac{1}{2} ,$$

wenn also der Abstand der beiden Ringe voneinander $(2h)$ gleich ihrem Radius a wird. Das ist die Helmholtzsche Bedingung. Der Faktor von ϵ^4 wird in diesem Falle

$$\frac{15}{8} q^2 - \frac{105}{4} p^2 q + \frac{315}{8} p^4 = -\frac{144}{125} ,$$

so dass wir für die Feldstärke

$$H_z = \frac{4\pi I}{ca} \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{144}{125} \frac{z^4}{a^4} \right)$$

erhalten.
Anmerkung: Eine genauere Untersuchung des Feldes zeigt, dass die radiale Komponente senkrecht zur z-Achse proportional zur dritten Potenz des Abstandes wird. Für eine praktische Anwendung muss man auch über die endlichen Abmessungen der Spulenkörper integrieren.