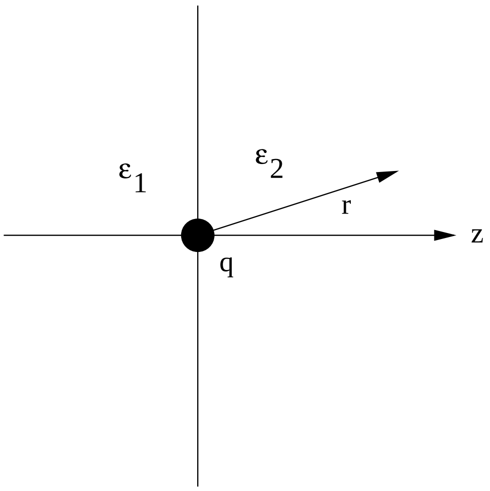
Theoretische Physik II für das Lehramt L3, SS2003, Prof. H.J. Lüdde

Lösungen - Kapitel I.3 Elektrostatik - Dielektrika

1



In beiden Halbräumen wird das Potential durch das Potential einer Punktladung bestimmt. Man erhält:

$$\begin{aligned} V_1(\vec{r}) &= \frac{c_1}{r} \text{ für } z < 0 \text{ und} \\ V_2(\vec{r}) &= \frac{c_2}{r} \text{ für } z > 0 \ . \end{aligned}$$

Die entsprechenden elektrischen Felder sind:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\vec{r}) &= \frac{c_1\vec{r}}{r^3} \text{ für } z < 0 \text{ und} \\ \vec{E}_2(\vec{r}) &= \frac{c_2\vec{r}}{r^3} \text{ für } z > 0 \ . \end{aligned}$$

Da die Tangentialkomponenten des $\vec{E}$-Feldes auf der Trennfläche stetig sind:

$$(E_1)_t = (E_2)_t \text{ für } z = 0$$

folgt

$$c_1 = c_2 = c \ .$$

Die dielektrische Verschiebung in beiden Gebieten ist

$$\begin{aligned} \vec{D}_1 &= \epsilon_1\vec{E}_1 \text{ und} \\ \vec{D}_2 &= \epsilon_2\vec{E}_2 \ . \end{aligned}$$

Die noch unbekannte Konstante c bestimmt man mit Hilfe des Gauß'schen Satzes: für eine Kugelfläche um den Koordinatenursprung gilt (beachte: das $\vec{D}$-Feld "sieht" keine Polarisationsladungen):

$$\begin{aligned}
\oint \vec{D}d\vec{f} = 4\pi q &= \epsilon_1 c \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\vec{R}}{R^3} R^2 \frac{\vec{R}}{R} \sin\theta d\theta d\varphi \\
&+ \epsilon_2 c \int_0^\pi \int_\pi^{2\pi} \frac{\vec{R}}{R^3} R^2 \frac{\vec{R}}{R} \sin\theta d\theta d\varphi \\
&= 2\pi c(\epsilon_1 + \epsilon_2) \\
\rightarrow c &= \frac{2q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \ .
\end{aligned}$$

Man erhält also

$$\begin{aligned}
V_1 &= V_2 = \frac{2q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{r} \\
\vec{E}_1 &= \vec{E}_2 = \frac{2q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{\vec{r}}{r^3} \\
\vec{D}_1 &= \frac{2q\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{\vec{r}}{r^3} \\
\vec{D}_2 &= \frac{2q\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{\vec{r}}{r^3} \ .
\end{aligned}$$

Grenzfälle:

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_2 = 1 \ : \ \text{Punktladung im Vakuum} \\
\epsilon_1 &= \epsilon_2 = \epsilon \ : \ \text{Punktladung in homogenem Medium} \ .
\end{aligned}$$

2

Der Kugelmittelpunkt wird als Ursprung des Koordinatensystems gewählt. Mit Hilfe von Kugelkoordinaten berechnet sich das Potential außerhalb der Kugel analog zur vorhergehenden Aufgabe durch Lösung der Laplace-Gleichung $\triangle V = 0$. Es gilt: $V(\vec{r}) = \frac{c}{r}$ für $r > R$ mit den Randbedingungen $V(R) = \text{const.}$ und $V(\infty) = 0$. Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes bestimmt man die Konstante c als

$$c = \frac{2q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \ \rightarrow \ V(\vec{r}) = \frac{2q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{r} \quad r > R \ .$$

Die Oberflächenladungsdichte der freien Ladungen auf der Kugel sind in den beiden Gebieten:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= -\frac{\epsilon_1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) \bigg|_{r=R} = \frac{2q\epsilon_1}{4\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{1}{R^2} \\
\sigma_2 &= -\frac{\epsilon_2}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) \bigg|_{r=R} = \frac{2q\epsilon_2}{4\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{1}{R^2} \ .
\end{aligned}$$

3

Die beiden Metallschalen sollen die Ladungen $+q$ und $-q$ tragen. Im Bereich zwischen R_1 und R_3 hat das $\vec{D}$-Feld nur eine radiale Komponente:

$$D_r = \frac{q}{r^2} \; ; \; R_1 > r > R_3 \; .$$

Es gilt weiter

$$\begin{aligned}
\vec{D}_r &= \epsilon_1 \vec{E}_r^1 \text{ für } R_1 < r < R_2 \; \rightarrow \; E_r^1 = \frac{q}{\epsilon_1 r^2} \\
\vec{D}_r &= \epsilon_2 \vec{E}_r^2 \text{ für } R_2 < r < R_3 \; \rightarrow \; E_r^2 = \frac{q}{\epsilon_2 r^2} \; .
\end{aligned}$$

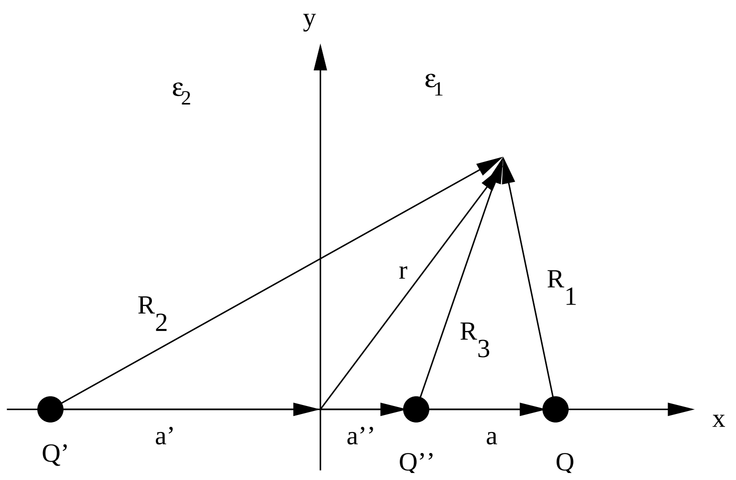
Die Potentialdifferenz zwischen den Kugelschalen wird durch ein Linienintegral über die elektrische Feldstärke bestimmt:

$$\begin{aligned}
V_1 - V_2 &= \int_{R_1}^{R_3} dr E_r = \frac{q}{\epsilon_1} \int_{R_1}^{R_2} dr \frac{1}{r^2} + \frac{q}{\epsilon_2} \int_{R_2}^{R_3} dr \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{q}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \\
&= \frac{q}{\epsilon_1} \frac{1}{R_1} - \frac{q}{\epsilon_2} \frac{1}{R_3} + q \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \frac{1}{R_2} \; .
\end{aligned}$$

Die Kapazität des Kugelkondensators beträgt:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_3} \; \rightarrow \; \frac{1}{C} = \frac{1}{\epsilon_1 R_1} - \frac{1}{\epsilon_2 R_3} + \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \frac{1}{R_2} \; .$$

4



Das Potential im Halbraum 1 wird durch Q und die Spiegelladung Q' bestimmt, das Potential im Halbraum 2 durch die Scheinladung Q''. Ansatz: $\varphi_1 = \frac{Q}{\epsilon_1 R_1} + \frac{Q'}{\epsilon_1 R_2}$; $\varphi_2 = \frac{Q''}{\epsilon_1 R_3}$

Motivation: Man versucht die Potentiale in den beiden Halbräumen mit Scheinladungen so zu konstruieren, als enthielte der ganze Raum nur ein Dielektrikum ϵ_1 bzw. ϵ_2.

$$\begin{aligned} R_1 &= \left[(x-a)^2+y^2+z^2\right]^{1/2} \\ R_2 &= \left[(x+a')^2+y^2+z^2\right]^{1/2} \\ R_3 &= \left[(x-a'')^2+y^2+z^2\right]^{1/2} \ . \end{aligned}$$

Randbedingungen

1) Das Potential an der Grenzfläche $x=0$ muss stetig sein

$$\varphi_1(x=0)=\varphi_2(x=0) \ .$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \varphi_1(x=0) &= \frac{Q}{\epsilon_1\left[a^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}+\frac{Q'}{\epsilon_1\left[a'^2+y^2+z^2\right]^{1/2}} \\ &= \frac{Q''}{\epsilon_1\left[a''^2+y^2+z^2\right]^{1/2}} \\ &= \varphi_2(x=0) \ . \end{aligned}$$

2) Da auf der Grenzfläche keine Flächenladungen existieren dürfen, muss wegen

$$\epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\bigg|_F-\epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\bigg|_F=-4\pi\sigma_F$$

auch die Ableitung die Bedingung

$$\epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$

erfüllen. Somit folgt

$$\begin{aligned} \epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} &= \frac{Qa}{\left[a^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}-\frac{Q'a'}{\left[a'^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \\ &= \frac{Q''a''}{\left[a''^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \\ &= \epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\bigg|_{x=0} \end{aligned}$$

Annahme: $a=a'=a''$
Lassen sich beide Bedingungsgleichungen unter dieser Annahme erfüllen, d.h. erfüllt unter dieser Annahme das Potential beide Randbedingungen, so ist die Annahme automatisch gerechtfertigt, denn die Lösung muss ja eindeutig sein.

aus 1)

$$\frac{Q+Q'}{\epsilon_1} = \frac{Q''}{\epsilon_2}$$

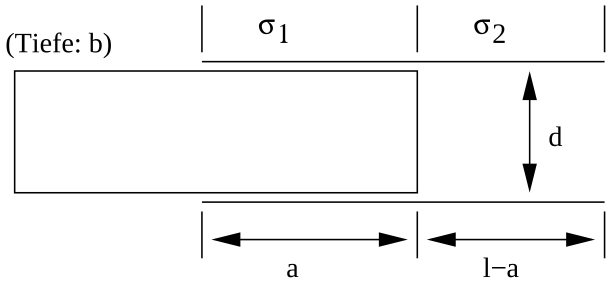
aus 2)

$$\begin{aligned} Q - Q' &= Q'' \\ \to Q' &= \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q \quad \text{und} \quad Q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q \end{aligned}$$

Es ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{Q}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{\left[(x-a)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{\left[(x+a)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}} \right) \\ \varphi_2 &= \frac{2Q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{\left[(x-a)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}} \; . \end{aligned}$$

5



Bezeichnen wir das linke Stück der Länge a mit 1, das rechte der Länge $l-a$ mit 2, so wird

$$\begin{aligned} D_1 &= \epsilon E_1 = 4\pi\sigma_1 \\ D_2 &= \epsilon E_2 = 4\pi\sigma_2 \end{aligned}$$

und die unveränderte Gesamtladung der Platten

$$q = [\sigma_1 a + \sigma_2 (l-a)] b \; .$$

Da jede Platte eine Äquipotentialfläche ist, muss die Potentialdifferenz zwischen beiden in 1 und 2 gleich sein,

$$U = E_1 d = E_2 d \; ,$$

also $E_1 = E_2$ und $\sigma_1 = \epsilon\sigma_2$. Setzen wir diese Beziehungen in die obigen ein und führen die gesamte Fläche $F = bl$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{q\epsilon}{F\left[1 + (\epsilon - 1)\frac{a}{l}\right]} \\ \sigma_2 &= \frac{q}{F\left[1 + (\epsilon - 1)\frac{a}{l}\right]} \; . \end{aligned}$$

Die elektrische Feldstärke folgt zu

$$E_1 = E_2 = \frac{4\pi q}{F\left[1 + (\epsilon - 1)\frac{a}{l}\right]} \ ,$$

die Potentialdifferenz zu

$$U = \frac{4\pi q d}{F\left[1 + (\epsilon - 1)\frac{a}{l}\right]}$$

und schließlich die Kapazität aus $C = \frac{q}{U}$ zu

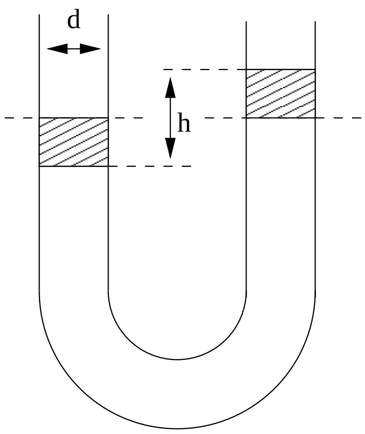
$$C = \frac{F}{4\pi d}\left[1 + (\epsilon - 1)\frac{a}{l}\right] \ .$$

Schließlich können wir die Energie des Feldes aus $W = \frac{1}{2}qU$ entnehmen,

$$U = \frac{2\pi q^2 d}{F\left[1 + (\epsilon - 1)\frac{a}{l}\right]} \ .$$

Alle Formeln gehen für $a = 0$ (kein Dielektrikum) und $a = l$ (volles Dielektrikum) in die Ausdrücke des entsprechenden Faraday'schen Grundversuches über.

6



Bei fester Spannung U am Kondensator wird die elektrische Energie $W_e = \frac{1}{2}CU^2$ verringert, wenn die dielektrische Flüssigkeit im linken Schenkel sinkt. Da bei verschieden hohen Flüssigkeitsspiegeln im linken und rechten Schenkel die Gravitationsenergie W_G auf jeden Fall vermehrt wird, folgt aus dem Energiesatz, dass die Flüssigkeit im linken Schenkel bei Anlegen der Spannung sinken muss. Stellt man die Höhendifferenz h ein, so wird die im linken Schenkel der Abbildung schraffiert gezeichnete Flüssigkeitsmasse $m = \rho g \frac{h}{2}$ durch die rechts schraffiert gezeichnete ersetzt, also im ganzen die Masse m um $\frac{h}{2}$ gehoben. Die Gravitationsenergie wird daher um

$$\Delta W_G = mg\frac{h}{2} = \frac{1}{4}\rho q g h^2$$

vermehrt. Dabei wird das links schraffiert gezeichnete Flüssigkeitsvolumen der Dielektrizitätskonstante ϵ aus dem Kondensator entfernt. Bei gegebener Spannung U bleibt die Feldstärke $E = \frac{U}{d}$ ungeändert. Dagegen wird die Verschiebung D in diesem Gebiet von ϵE auf E vermindert, d.h. die elektrische Energie des Volumens $V = q\frac{h}{2}$ um

$$\Delta W_G = -\frac{V}{8\pi}E^2(\epsilon - 1) = -\frac{1}{4}\chi\frac{U^2}{d^2}qh$$

verändert, wobei wir ϵ durch die Suszeptibilität

$$\chi = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}$$

ersetzt haben. Insgesamt wird also

$$\Delta W = \Delta W_G + \Delta W_e = \frac{1}{4}q\left(\rho g h^2 - \chi\frac{U^2}{d^2}h\right) .$$

Gleichgewicht besteht bei

$$\frac{d\Delta W}{dh} = \frac{1}{4}q\left(2\rho g h - \chi\frac{U^2}{d^2}\right) = 0 ,$$

d.h. für $h = h_0$ mit

$$h_0 = \frac{1}{2}\chi\frac{U^2}{\rho g d^2} .$$

Damit können wir schreiben

$$\Delta W = \frac{1}{4}\rho q g(h^2 - 2h_0 h) .$$

Man sieht sofort, dass

$$\frac{d^2\Delta W}{dh^2} = \frac{1}{2}\rho q g > 0$$

wird; die Energie hat für $h = h_0$ ein Minimum, so dass das Gleichgewicht stabil ist. Die gesuchte Suszeptibilität χ folgt also zu

$$\chi = \frac{2\rho g d^2}{U^2}h_0 .$$

Hätten wir den Kondensator von der Batterie abgeklemmt, so dass die Ladung konstant bliebe und die Spannung absänke, so würde die Flüssigkeit im linken Schenkel steigen um

$$h_0 = \frac{1}{2}\frac{\chi}{1 + 4\pi\chi}\frac{U^2}{\rho g d^2} .$$