Theoretische Physik II für das Lehramt L3, SS2003, Prof. H.J. Lüdde

Lösungen - Kapitel I.2 Elektrostatik - Geladene Metallkörper

1

Zu lösen ist die Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \ .$$

Um die Randbedingung möglichst einfach angeben zu können, schreibt man diese Gleichung in ebene Polarkoordinaten $(x, y) \to (r, \varphi)$ um

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \ ,$$

mit der Randbedingung

$$\phi(1, \varphi) = \cos\varphi \ .$$

Zur Separation der Variablen setze

$$\phi(r, \varphi) = v(r)w(\varphi)$$

in die Differentialgleichung ein

$$w(\varphi)v''(r) + \frac{1}{r}w(\varphi)v'(r) + \frac{1}{r^2}v(r)w''(\varphi) = 0 \ .$$

Division durch $w(\varphi)v(r) \neq 0$ und Multiplikation mit r^2 ergibt

$$r^2\frac{v''(r)}{v(r)} + r\frac{v'(r)}{v(r)} = -\frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)} = k^2$$

und es folgen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} w''(\varphi) + k^2 w(\varphi) &= 0 \\ r^2 v''(r) + r v'(r) - k^2 v(r) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der ersten Gleichung ist

$$w(\varphi) = A\sin k\varphi + B\cos k\varphi \ .$$

Damit $w(\varphi)$ eindeutig ist, muss gelten

$$\begin{aligned} w(\varphi) &= w(\varphi + 2\pi) \\ A\sin k\varphi + B\cos k\varphi &= A\sin k(\varphi + 2\pi) + B\cos k(\varphi + 2\pi) \\ &= A\sin k\varphi\cos k2\pi + A\cos k\varphi\sin k2\pi + \\ &\quad\ B\cos k\varphi\cos k2\pi - B\sin k\varphi\sin k2\pi \ . \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} \sin k2\pi(A\cos k\varphi - B\sin k\varphi) &= 0 \\ \cos k2\pi &= 0 \\ \to k = n\ ,\ n \in \mathbb{N}\ . \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist eine Differentialgleichung vom Euler-Typ. Wähle als Ansatz

$$v(r) = r^s\ .$$

Einsetzen liefert

$$r^s s(s-1)r^{s-2} + rsr^{s-1} - n^2 r^s = 0 \to s^2 = n^2 \to s = \pm n$$

$$v(r) = ar^n + br^{-n}\ .$$

$v(r)$ soll für $r < 1$ beschränkt sein, insbesondere für $r = 0$, d.h. $b = 0$. Damit hat man als Gesamtlösung

$$\phi_n(r,\varphi) = r^n(A'\sin n\varphi + B'\cos n\varphi)\ ,\ A' = A\cdot a\ ,\ B' = B\cdot a\ .$$

Aus der Randbedingung erhält man

$$\phi_n(1,\varphi) = \cos\varphi = 1^n(A'\sin n\varphi + B'\cos n\varphi) \to B' = 1, n = 1 \to \phi(r,\varphi) = r\cos\varphi\ .$$

2

Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0\ .$$

Separationsansatz:

$$\phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)\ .$$

Damit liefert die Laplace-Gleichung

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

Damit diese Gleichung für beliebige Werte der unabhängigen Variablen gilt, muss jeder der 3 Terme für sich konstant sein:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2\ ,\ \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2\ ,\ \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2\ ,$$

mit

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2.$$

Angenommen α^2 und β^2 seien positiv, dann besitzen die obigen 3 Differentialgleichungen die Lösungen

$$X_\pm = \exp(\pm i\alpha x) \; ; \; Y_\pm = \exp(\pm i\beta y) \; ; \; Z_\pm = \exp(\pm \gamma z) \; .$$

Im allgemeinen kann $\phi(x, y, z)$ nun als Produkt von Linearkombinationen der $X_\pm, Y_\pm, Z_\pm$ dargestellt werden. Die Konstanten α und β werden durch die Randbedingungen eines speziellen Problems bestimmt. Dies soll beispielhaft an Hand des rechteckigen Kastens geschehen. In diesem Fall erfüllen

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2i}(X_+ - X_-) = \sin(\alpha x) \\ Y &= \frac{1}{2i}(Y_+ - Y_-) = \sin(\beta y) \end{aligned}$$

und

$$Z = \frac{1}{2}(Z_+ - Z_-) = \sinh(\gamma z)$$

die Bedingung, dass $\phi(x, y, z) = 0$ für $x = 0, y = 0, z = 0$. Damit $\phi = 0$ bei $x = a$ und $y = b$, muss gelten:

$$\begin{aligned} \alpha a = n\pi \quad &\rightarrow \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \\ \beta b = m\pi \quad &\rightarrow \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b} \\ &\rightarrow \quad \gamma_{nm} = (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^{1/2} = \pi\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^{1/2} \quad . \end{aligned}$$

Folglich kann man das Potential ϕ als Linearkombination der "partiellen Potentiale"

$$\phi_{n,m}(x, y, z) = \sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sinh(\gamma_{nm} z)$$

darstellen:

$$\phi(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m}\phi_{n,m}$$

Da $\phi = V(x, y)$ bei $z = c$, kann man mit Hilfe dieser Randbedingung die Entwicklungskoeffizienten $A_{n,m}$ bestimmen; es ist nämlich

$$V(x, y) = \phi(x, y, z = c) = \sum_{n,m=1} A_{n,m}\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sinh(\gamma_{nm} c)$$

Dies ist eine doppelte Fourierreihe für $V(x, y)$, so dass die $A_{n,m}$ gegeben sind als

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= \frac{4}{ab\sinh(\gamma_{nm} c)}\int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y)\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y) \\ &= \frac{4}{ab\sinh(\gamma_{nm} c)}\int_0^a dx x\sin(\alpha_n x)\int_0^b dy y\sin(\beta_m y) \; . \end{aligned}$$

Integration liefert:

$$A_{n,m} = \frac{4}{ab\sinh(\gamma_{nm} c)}\left[\frac{\sin(\alpha_n a)}{\alpha_n^2} - \frac{a\cos(\alpha_n a)}{\alpha_n}\right]\left[\frac{\sin(\beta_m b)}{\beta_m^2} - \frac{b\cos(\beta_m b)}{\beta_m}\right] \; .$$

3

a) Die Laplace-Gleichung lautet in Kugelkoordinaten:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0\ .$$

Setzt man den Produktansatz

$$\phi = \frac{U(r)}{r}P(\theta)Q(\varphi)$$

in die obige Differentialgleichung ein, so erhält man

$$PQ\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{UP}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = 0\ .$$

Multiplikation mit $\frac{r^2\sin^2\theta}{UPQ}$ ergibt

$$r^2\sin^2\theta\left[\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right] + \frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = 0\ .$$

Ähnlich wie in der vorhergehenden Aufgabe, wählt man

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -m^2 \to Q = e^{\pm im\varphi}\ .$$

Einsetzen dieser Lösung und Division durch $\sin^2\theta$ ergibt die beiden Differentialgleichungen für P und U

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P(\theta) &= 0\\ \frac{d^2U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}U &= 0\ .\end{aligned}$$

Substituiert man $x = \cos\theta$, so erhält man aus der ersten Gleichung die verallgemeinerte Legendre-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P = 0\ ,$$

die für $m = 0$ in die Legendre'sche Differentialgleichung übergeht:

$$(1-x^2)P'' - 2xP' + l(l+1)P = 0\ .$$

Einsetzen der Reihenentwicklung für $P(x)$ ergibt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((\beta+n)(\beta+n-1)a_n x^{\beta+n-2} - \left[(\beta+n)(\beta+n+1) - l(l+1)\right]a_n x^{\beta+n}\right) = 0\ .$$

Damit diese Summe verschwindet, muss der Koeffizient jeder Potenz von x verschwinden. Betrachten wir die jeweils niedrigste Potenz in x, so gilt für

$$\begin{aligned} n &= 0: \text{ wenn } a_0 \neq 0, \text{ dann ist } \beta(\beta-1) = 0 \\ n &= 1: \text{ wenn } a_1 \neq 0, \text{ dann ist } \beta(\beta+1) = 0\,. \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall ergibt Koeffizientenvergleich die Rekursionsformel

$$a_{n+2} = \frac{(\beta+n)(\beta+n+1) - l(l+1)}{(\beta+n+1)(\beta+n+2)} a_n\,.$$

Man sieht leicht, dass die beiden vorherigen Beziehungen äquivalent sind. Man braucht also nur entweder a_0 oder a_1 ungleich Null zu wählen. Im ersten Fall hat man die Wurzeln $\beta = 0$ und $\beta = 1$, die eine gerade ($\beta = 0$) bzw. ungerade ($\beta = 1$) Potenzreihe in x liefern. Da man eine beschränkte Lösung für $-1 \leq x \leq 1$ sucht, soll die Potenzreihe abbrechen. Da β und n ganze Zahlen ≥ 0 sind, bricht die Rekursionsformel nur ab, wenn auch l eine ganze, positive Zahl ist. Wenn l gerade (ungerade), bricht nur die $\beta = 0$ ($\beta = 1$) Reihe ab. Die so erhaltenen Polynome in x werden derart normiert, dass sie für $x = +1$ gleich eins sind. Die normierten Polynome heißen Legendre-Polynome der Ordnung l.

b) Die Legendre-Polynome erfüllen die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right] + l(l+1)P_l(x) = 0\,.$$

Multiplikation mit $P_{l'}$ und Integration über x

$$\int_{-1}^{+1} P_{l'}\left(\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right] + l(l+1)P_l(x)\right) dx = 0\,.$$

Partielle Integration des ersten Terms ergibt

$$\int_{-1}^{+1}\left[(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\frac{dP_{l'}}{dx} + l(l+1)P_l(x)P_{l'}(x)\right] dx = 0\,.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung l mit l' und subtrahiert die neue von der alten Gleichung, so ergibt sich:

$$[l(l+1) - l'(l'+1)]\int_{-1}^{+1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = 0\,.$$

Falls $l \neq l'$ muss das Integral verschwinden, damit die Gleichung erfüllt ist. Im Fall $l = l'$ kann man sofort sehen, dass das Integral endlich ist. Damit ist die Orthogonalität der $P_l(x)$ bewiesen.

4

In der quellenfreien Zone außerhalb der Kugel ist das Potential eine Lösung der Laplace-Gleichung:

$$\triangle V_a = 0 \; , \; r \geq R \; .$$

Innerhalb der Kugel genügt es der Poisson-Gleichung

$$\triangle V_i = -4\pi\rho(r) = -4\pi\rho_0 e^{-\mu r} \; .$$

Auf der Kugeloberfläche muss gelten: $V_i(R) = V_a(R)$. Da die Ladungsverteilung kugelsymmetrisch ist, lautet die Laplace-Gleichung außerhalb der Kugel:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV_a}{dr}\right) = 0 \; .$$

Es folgt unmittelbar $r^2\frac{dV_a}{dr} = a$, d.h. $\frac{dV_a}{dr} = \frac{a}{r^2}$ und $V_a(r) = \int dr\frac{a}{r^2}$ also

$$V_a(r) = -\frac{a}{r} + b \; .$$

Da $V_a(r \to \infty) = 0$ folgt $b = 0$. a wird mit Hilfe des Gauß'schen Satzes bestimmt

$$\int \vec{E} d\vec{f} = 4\pi q \; .$$

In diesem Fall ist $\vec{E} = -\nabla V_a = -\frac{a}{r^2}$ und $d\vec{f} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Daraus folgt $a = -q$ und

$$V_a(r) = \frac{q}{r} \; .$$

Lösung der Differentialgleichung im Innenraum

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV_i}{dr}\right) &= -4\pi\rho_0 e^{-\mu r} \\
\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV_i}{dr}\right) &= -4\pi\rho_0 r^2 e^{-\mu r} \\
r^2\frac{dV_i}{dr} &= -4\pi\rho_0 \int dr r^2 e^{-\mu r} = 4\pi\rho_0 \left[e^{-\mu r}\left(\frac{r^2}{\mu} + \frac{2r}{\mu^2} + \frac{2}{\mu^3}\right) + C_1\right] \\
\frac{dV_i}{dr} &= 4\pi\rho_0 \left[e^{-\mu r}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{2}{\mu^2 r} + \frac{2}{\mu^3 r^2}\right) + \frac{C_1}{r^2}\right] \\
V_i &= 4\pi\rho_0 \left[\frac{1}{\mu}\int dr e^{-\mu r} + \frac{2}{\mu^2}\int dr\frac{e^{-\mu r}}{r} + \frac{2}{\mu^3}\int dr\frac{e^{-\mu r}}{r^2} + C_1\int\frac{dr}{r^2}\right]
\end{aligned}$$

mit

$$\frac{2}{\mu^3}\int dr\frac{e^{-\mu r}}{r^2} = \frac{2}{\mu^3}\left(-\frac{e^{-\mu r}}{r} - \mu\int dr\frac{e^{-\mu r}}{r}\right)$$

folgt

$$V_i = -4\pi\rho_0 \left[\frac{2}{\mu^3}\frac{e^{-\mu r}}{r} + \frac{e^{-\mu r}}{\mu^2} + \frac{C_1}{r} + C_2\right] \; .$$

Es gilt

$$V_a(R) = \frac{q}{R} \; ; \; q = 4\pi\rho_0 \int_0^R r^2 dr e^{-\mu r} = -4\pi\rho_0 \left[e^{-\mu R} \left(\frac{R^2}{\mu} + \frac{2R}{\mu^2} + \frac{2}{\mu^3} \right) - \frac{2}{\mu^3} \right]$$

Aus der Anschlussbedingung $V_i(R) = V_a(R)$ ergibt sich

$$e^{-\mu R} \left(\frac{2}{\mu^3 R} + \frac{1}{\mu^2} \right) + \frac{C_1}{R} + C_2 = e^{-\mu R} \left(\frac{R}{\mu} + \frac{2}{\mu^2} + \frac{2}{\mu^3 R} \right) - \frac{2}{\mu^3 R} \; .$$

Damit lauten die Konstanten C_1 und C_2:

$$C_1 = -\frac{2}{\mu^3} \; ; \; C_2 = \frac{e^{-\mu R}}{\mu^2}(\mu R + 1) \; .$$

Es folgt:

$$V_i(r) = -\frac{4\pi\rho_0}{\mu^2} \left[\frac{2}{\mu r} \left(e^{-\mu r} - 1 \right) + e^{-\mu r} + e^{-\mu R}(\mu R + 1) \right]$$

und

$$V_a(r) = -\frac{4\pi\rho_0}{r} \left[e^{-\mu R} \left(\frac{R^2}{\mu} + \frac{2R}{\mu^2} + \frac{2}{\mu^3} \right) - \frac{2}{\mu^3} \right] \; .$$

5

Der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten lautet:

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \; .$$

Setzt man den Separationsansatz

$$\phi(r, z, \varphi) = \phi_1(r, z)\phi_2(\varphi)$$

in die Laplace-Gleichung $\triangle\phi = 0$ ein, so erhält man

$$\phi_2(r^2\partial_r^2 + r\partial_r + r^2\partial_z^2)\phi_1 = -\phi_1\partial_\varphi^2\phi_2 \; .$$

Multiplikation mit $\frac{1}{\phi}$ separiert die Laplace-Gleichung in die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_\varphi^2\phi_2 + k^2\phi_2 &= 0 \\ (r^2\partial_r^2 + r\partial_r + r^2\partial_z^2)\phi_1 - k^2\phi_1 &= 0 \; . \end{aligned}$$

Die Lösung der ersten Gleichung ist der harmonische Oszillator

$$\phi_2(\varphi) = A \sin k\varphi + B \cos k\varphi \; .$$

Da aber das Potential axialsymmetrisch ist, muss für jedes $\epsilon \in [0, 2\pi]$ gelten

$$\phi_2(\varphi) = \phi_2(\varphi + \epsilon) = \text{const.} \neq 0 \; ,$$

was nur für $k = 0$ erfüllt werden kann. D.h. es bleibt

$$(r^2\partial_r^2 + r\partial_r + r^2\partial_z^2)\phi_1 = 0$$

zu lösen. Für das Potential auf der Symmetrieachse gilt

$$\phi_1(0, z) = \phi_0(z) \ .$$

Setze die Lösung in Form einer Potenzreihe in r an

$$\phi_1(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) r^n$$

so erhält man zusammen mit der obigen Beziehung

$$a_0(z) = \phi_1(0, z) = \phi_0(z) \ .$$

Setzt man den Potenzreihenansatz in die Differentialgleichung ein und fordert, dass $a_1 = 0$, so erhält man eine Rekursionsformel für die a_n

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_{n+2}(n+2) + \partial_z^2 a_n\right) &= 0 \\ a_{n+2} &= -\frac{\partial_z^2 a_n}{(n+2)^2} \ . \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} n = 0 & a_0 = \phi_0(z) \\ n = 2 & a_2 = -\dfrac{\phi_0''}{1^2 \cdot 2^2} \\ n = 4 & a_4 = -\dfrac{\partial_z^2 a_2}{4^2} = \dfrac{\phi_0^{(IV)}}{2^2 \cdot 4^2} = \dfrac{\phi_0^{(IV)}}{2^2 \cdot 2^4} \\ n = 6 & a_6 = -\dfrac{\partial_z^2 a_4}{6^2} = -\dfrac{\phi_0^{(VI)}}{2^2 \cdot 2^4 \cdot 6^2} = -\dfrac{\phi_0^{(VI)}}{(2 \cdot 3)^2 \cdot 2^6} \\ \vdots & \vdots \\ n = 2k & a_{2k} = (-1)^k \dfrac{\phi_0^{(2k)}}{(k!)^2 2^{2k}} \quad k = 1, 2, \dots \end{array}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \phi_1(r, z) &= \phi(z) - \frac{\phi''}{4} r^2 + \frac{\phi^{(IV)}}{64} r^4 \mp \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \phi_0^{(2k)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} \\ \phi(r, z, \varphi) &= \text{const.}\ \phi_1(r, z) \ . \end{aligned}$$

ϕ ist das Potential im ladungsfreien Raum um die Symmetrieachse.

6

Man kann die Oberflächenladungsdichte als Raumladungsdichte umformulieren

$$\rho(\vec{r}') = \sigma_0 \cos\theta' \delta(r' - R) \; .$$

Berücksichtigt man, dass $Y_{l0}(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta'$, so lassen sich die Multipolmomente mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation der Kugelflächenfunktionen angeben:
$|\vec{r}'| < |\vec{r}|$, außerhalb der Kugel:

$$\begin{aligned}
q_{lm} &= \int_{V'} \rho(\vec{r}') r'^l Y^*_{lm}(\theta', \varphi') d^3r' \\
&= \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_0^\infty r'^l \delta(r' - R) r'^2 dr' \int_{\Omega'} Y_{10}(\theta', \varphi') Y^*_{lm}(\theta', \varphi') d\Omega' \\
&= \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_0^\infty r'^l \delta(r' - R) r'^2 dr' \delta_{l1} \delta_{m0} \\
&= \begin{cases} \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} R^3 & l = 1, m = 0 \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\phi(\vec{r}) = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta, \varphi) \frac{R^3}{r^2} = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 \cos\theta \frac{R^3}{r^2}$$

$|\vec{r}'| > |\vec{r}|$, innerhalb der Kugel:

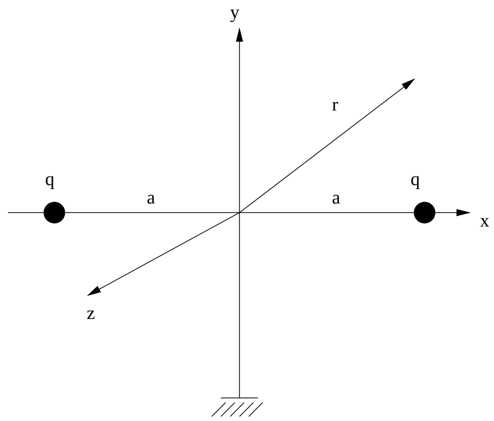
$$\begin{aligned}
q_{lm} &= \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{1}{r'^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta', \varphi') d^3r' \\
&= \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_0^\infty r'^{2-l-1} \delta(r' - R) dr' \int_{\Omega'} Y_{10}(\theta', \varphi') Y^*_{lm}(\theta', \varphi') d\Omega' \\
&= \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_0^\infty r'^{2-l-1} \delta(r' - R) dr' \delta_{l1} \delta_{m0} \\
&= \begin{cases} \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} & l = 1, m = 0 \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\phi(\vec{r}) = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta, \varphi) r = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 \cos\theta r$$

Wie sieht also eine Oberflächenladungsverteilung aus, die nur ein Dipolmoment erzeugt?

7



Wie man sich aus Symmetriegründen anschaulich überlegen kann, ist das Potential in der rechten Halbebene

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}|} - \frac{q}{|\vec{r}+\vec{a}|}$$

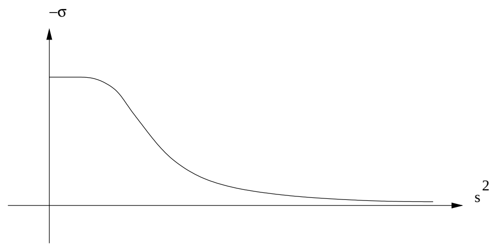
Die Oberflächenladung erhält man aus

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}\bigg|_{\text{Fläche}}$$

mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial n}\bigg|_{\text{Fläche}} &= \vec{n}\cdot\nabla V\bigg|_{\text{Fläche}} = \frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{\vec{r}=(0,y,z)} \\
\frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{(x-a)q}{[(x-a)^2+y^2+z^2]^{3/2}} + \frac{(x+a)q}{[(x+a)^2+y^2+z^2]^{3/2}} \\
\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{\vec{r}=(0,y,z)} &= \frac{2aq}{[a^2+y^2+z^2]^{3/2}} \\
\sigma &= -\frac{1}{2\pi}\frac{aq}{[s^2+a^2]^{3/2}}\ ;\ s^2 := y^2+z^2\ .
\end{aligned}$$

Auf der Leiterfläche ist die Ladungsdichte zylindersymmetrisch verteilt (bezüglich der x-Achse als Symmetrieachse) mit einem Maximum im Koordinatenursprung.



Die gesamte induzierte Ladung erhält man aus

$$Q_{ind} = \iint\limits_{\text{Ebene}} \sigma df = -aq\int_0^\infty \frac{sds}{[s^2+a^2]^{3/2}} = -q$$

Zur Erläuterung: Wegen der Zylindersymmetrie löst man das Integral in Zylinderkoordinaten

$$\iint \sigma df = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \sigma r dr$$

mit $r = (z^2 + y^2)^{1/2} \equiv s$

$$\iint \sigma df = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{aqsds}{[s^2 + a^2]^{3/2}} = -aq \int_0^{\infty} \frac{sds}{[s^2 + a^2]^{3/2}} = -q$$

8

Ein Quadrupolfeld hat die Form

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5}$$

mit $Q_{ij} = \int d^3r'(3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij})\rho(\vec{r}')$, dem Quadrupolmoment-Tensor. Im folgenden wird nur das Feld außerhalb der Ladungsverteilung betrachtet; man kann also allgemein schreiben

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

mit den Multipolmomenten

$$q_{lm} = \int d^3r' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') r'^l \rho(\vec{r}')$$

In dieser Summe dürfen nur die Quadrupolmomente Beiträge zum Potential liefern, daher kann man auf Grund der Orthogonalitätsrelation der Y_{lm} für die Ladungsverteilung den Ansatz

$$\rho(\vec{r}') = R(r') \sum_{m=-2}^{2} a_m Y_{2m}(\theta', \varphi')$$

machen. Damit erhält man für die Quadrupolmomente (mit $I = \int dr' r'^4 R(r')$):

$$q_{2-2} = a_{-2} I \ ; \ q_{2-1} = a_{-1} I \ ; \ q_{20} = a_0 I \ ; \ q_{21} = a_1 I \ ; \ q_{22} = a_2 I$$

alle anderen Multipolmomente verschwinden. Somit gilt

$$\phi(\vec{r}) = \frac{4\pi I}{5r^3} \sum_{m-2}^{2} a_m Y_{2m}(\theta, \varphi)$$

Drückt man die Kugelflächenfunktionen durch die kartesischen Komponenten von $\vec{r}$ aus, so lautet

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{4\pi I}{5r^5} \left[\frac{a_{-2}}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (x - iy)^2 - \frac{a_{-1}}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} z(x - iy) + \frac{a_0}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (3z^2 - r^2) \right. \\ &- \left. \frac{a_1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} z(x + iy) + \frac{a_2}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (x + iy)^2 \right] \end{aligned}$$

und nach weiterer Umformung

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{4\pi I}{5r^5}\left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(a_{-2}+a_2)(x^2-y^2) - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(a_{-2}-a_2)xy - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(a_{-1}+a_1)xz\right. \\ &+ \left.\frac{i}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(a_{-1}-a_1)zy + \frac{a_0}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}(3z^2-r^2)\right]\end{aligned}$$

Da $r^2 = x^2+y^2+z^2$, folgt für die Elemente des Quadrupolmoment-Tensors:

$$\begin{aligned}Q_{xx} &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(a_{-2}+a_2) - a_0\sqrt{\frac{5}{\pi}}\right] \\ Q_{yy} &= -\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(a_{-2}+a_2) + a_0\sqrt{\frac{5}{\pi}}\right] \\ Q_{zz} &= a_0\sqrt{\frac{5}{\pi}} \\ Q_{xy} &= -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(a_{-2}-a_2) \\ Q_{xz} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(a_{-1}-a_1) \\ Q_{yz} &= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(a_{-1}-a_1)\end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass die Summe der Diagonalglieder des Tensors verschwindet; der Tensor also 5 unabhängige Komponenten hat. Es ist sofort einzusehen, dass in einem solchen Quadrupolfeld die Gesamtladung verschwindet $\int d^3r'\rho(\vec{r}') = 0$ und die Ladungsverteilung ein verschwindendes Dipolmoment erzeugt $\int d^3r'\vec{r}'\rho(\vec{r}') = 0$. Das Quadrupolfeld ist ellipsoidförmig.

9

Das Quadrupolmoment des Atomkerns ist gegeben durch

$$\begin{aligned}Q &= \int_\Omega\int_0^{R(\theta)} \rho_0 r^2 Y_{20}^* r^2 dr\, d\Omega \\ &= \rho_0\int_\Omega\int_0^{R(\theta)} r^4 Y_{20}^* dr\, d\Omega \\ &= \frac{\rho_0}{5}\int_\Omega [R_0(1+a_0Y_{20}]^5 Y_{20}^* d\Omega\end{aligned}$$

Entwickelt man die eckige Klammer nach Potenzen von a_0, so erhält man in 1. Ordnung

$$\begin{aligned}Q &= \frac{\rho_0 R_0^5}{5}\int_\Omega [1+5a_0Y_{20}]Y_{20}^* d\Omega \\ &= \frac{\rho_0 R_0^5}{5}\int_\Omega Y_{20}^* d\Omega + a_0\rho_0 R_0^5\int_\Omega Y_{20}Y_{20}^* d\Omega\ .\end{aligned}$$

Das 1. Integral verschwindet wegen der Orthogonalitätsrelation der Y_{lm} und das 2. Integral wird Eins. Damit folgt

$$Q = a_0 \rho_0 R_0^5$$

für das Quadrupolmoment des Kerns.

10

Es gilt

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm}^A \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \; ; \; r > R$$

und

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm}^I Y_{lm}(\theta, \varphi) r^l \; ; \; r < R$$

mit

$$q_{lm}^A = \int d^3r' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') r'^l \rho(\vec{r}')$$

und

$$q_{lm}^I = \int d^3r' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') r'^l \frac{\rho(\vec{r}')}{r^{l+1}} \; .$$

Mit Hilfe der δ-Funktion in ebenen Polarkoordinaten kann man die Ladung des Kreisrings einfach beschreiben. Es ist

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos\theta' \\ y' &= r' \sin\theta' \\ \delta(x' - x_0')\delta(y' - y_0') &= \frac{1}{|J|}\delta(r' - r_0')\delta(\theta' - \theta_0') \end{aligned}$$

worin J die Jacobi-Determinante der obigen Transformation ist. Man sieht sofort, dass $J = r'$. Damit lautet die Ladungsverteilung auf dem Kreisring:

$$\rho(\vec{r}') = \frac{\rho_0}{r'}\delta(r' - R_0)\delta(\theta' - \frac{\pi}{2}) \; .$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} q_{lm}^A &= \rho_0 R^{l+1} \int d\varphi Y_{lm}^*(\frac{\pi}{2}, \varphi) \\ q_{lm}^I &= \frac{\rho_0}{R^l} \int d\varphi Y_{lm}^*(\frac{\pi}{2}, \varphi) \; . \end{aligned}$$

Da

$$\int d\varphi e^{im\varphi} = 2\pi\delta_{m0}$$

folgt

$$
\begin{aligned}
q_{lm}^A &= 2\pi\rho_0 R^{l+1}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l^m(0)\delta_{m0} \\
q_{lm}^I &= \frac{2\pi\rho_0}{R^l}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l^m(0)\delta_{m0} \ .
\end{aligned}
$$

Verwendung der Formeln

$$
P_{2l}(0) = (-1)^l\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} \ ; \ P_{2l+1}(0) = 0 \ ; \ l = 0, 1, 2, \ldots
$$

liefert

$$
\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= 2\pi\rho_0\sum_l\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}R^{l+1}P_l(0)\frac{Y_{l0}(\theta,\varphi)}{r^{l+1}} \\
&= 2\pi\rho_0 R\sum_l\frac{R^{2l}}{r^{2l+1}}(-1)^l\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}P_{2l}(\cos\theta) \\
&= q\sum_l(-1)^l\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}\frac{R^{2l}}{r^{2l+1}}P_{2l}(\cos\theta) \ ; \ r > R
\end{aligned}
$$

wegen

$$
\rho_0 = \frac{q}{2\pi R}
$$

und analog

$$
\phi(\vec{r}) = \frac{q}{R}\sum_l(-1)^l\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}\left(\frac{r}{R}\right)^{2l}P_{2l}(\cos\theta) \ ; \ r < R
$$

11

Stellt man eine ungeladene, leitende Kugel in ein homogenes elektrisches Feld, so lautet das Potential

$$
V(r,\theta) = -E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta \quad \text{(siehe Vorlesung)} \ .
$$

Dieses Potential erfüllt die gleichen Randbedingungen, wie sie im vorgegebenen Problem vorliegen. Beweis in Polarkoordinaten:

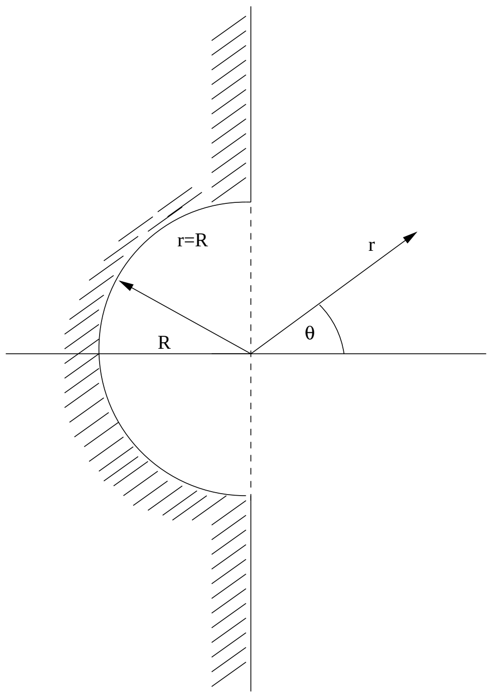
a)

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= (E_r, E_\theta, E_\varphi) = \left(-\frac{\partial V}{\partial r}, -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}, 0\right) \\
\vec{E} &= E_0\left(\left[1 + \frac{2R^3}{r^3}\right]\cos\theta, -\left(-1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\sin\theta, 0\right) \\
\vec{E}_{\vec{r}\to\infty} &= E_0(\cos\theta, -\sin\theta, 0) \ .
\end{aligned}
$$

Dies ist die Zerlegung des Vektors $\vec{E} = E_0\vec{e}_z$ weil $\vec{e}_z = (\cos\theta, -\sin\theta, 0)$. Somit ist das Feld in großer Entfernung homogen.

b)

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= -E_0\left(r-\frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta \\
V(r,\frac{\pi}{2}) &= 0\;;\; R\le |r|\le\infty \\
V(R,\theta) &= 0\;;\; -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\;.
\end{aligned}
$$



Die Lösung erfüllt also die Randbedingung, dass das Potential auf der Leiteroberfläche Null ist.

1) Auf der ebenen Fläche das Leiters berechnet sich die Oberflächenladungsdichte zu

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=0}\;.$$

Dazu transformiert man das Potential in kartesische Koordinaten:

$$V(r,\theta)\;\rightarrow\;V(x,y,z) = -E_0\left(z-\frac{R^3 z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

und es folgt

$$\sigma = \frac{E_0}{4\pi}\left(1-\frac{R^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)\;,$$

d.h. bei großem Abstand von der Delle wird

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{E_0}{4\pi}\;.$$

Ansonsten ist $\sigma\le\sigma_0$.

2) Die Oberflächenladung auf der Delle beträgt

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}\bigg|_{r=R} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial r}\bigg|_{r=R} .$$

Also

$$\sigma = -\frac{3}{4\pi}E_0\cos\theta\ .$$

In der Delle gilt $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \to \cos\theta \leq 0$ und $\sigma \geq 0$. Somit hat das elektrische Feld etwa den folgenden Verlauf: