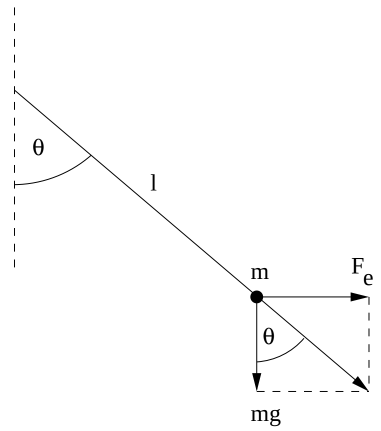
Theoretische Physik II für das Lehramt L3, SS2003, Prof. H.J. Lüdde

Lösungen - Kapitel I.1 Elektrostatik - Ladungen in materiefreiem Raum

1

Gleichgewicht besteht, wenn die Summe der beiden Kräfte in Fadenrichtung wirkt.



$$\tan\theta = \frac{F_e}{mg} \approx \sin\theta$$

Aus der Geometrie der Anordnung (siehe Zeichnung in der Aufgabenstellung) erkennt man

$$\sin\theta = \frac{x}{2l} \; .$$

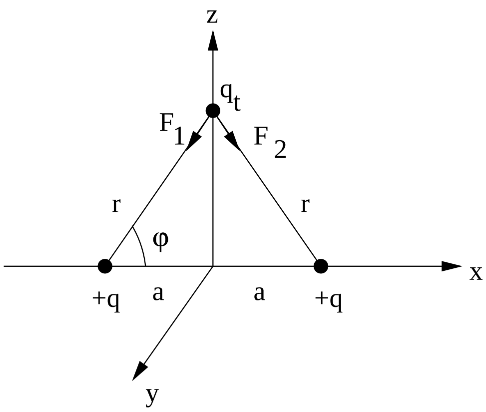
Vergleich der beiden Aussagen liefert

$$\frac{x}{2l} = \frac{q^2/x^2}{mg} \Longrightarrow x = \left(\frac{2lq^2}{mg}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Longrightarrow q = \sqrt{\frac{x^3\,mg}{2l}} = 71.5 \text{ statcoulomb}$$

2

Die beiden Kraftvektoren (im Bild für negative Testladung q_t) addieren sich gemäß $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ mit dem Betrag $F = 2F_1 \sin\varphi$ (die beiden Vektoren sind gleich lang und schließen den Winkel φ mit der x-Achse ein).

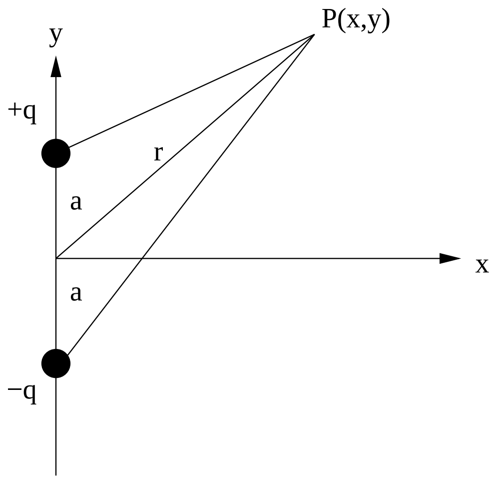


Es gelten:

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}$$
$$F_1 = \frac{qq_t}{r^2}$$
$$F = 2qq_t\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r^3}$$

Aus $\frac{dF}{dr}=0$ folgt $-2r^2+3a^2=0$ oder $r=\sqrt{\frac{3}{2}}a$. Wegen Symmetrie: Kurve ist Kreis mit Radius $\frac{a}{\sqrt{2}}$ in der z-y-Ebene mit Mittelpunkt $\vec{O}=(0,0,0)$. Richtung des Kraftvektors wenn q_t positiv ist: radial nach außen.

3



Feldkomponenten:

$$\begin{aligned}
E_x &= qx\left[\frac{1}{(x^2+(y-a)^2)^{3/2}}-\frac{1}{(x^2+(y+a)^2)^{3/2}}\right]\\
E_y &= qy\left[\frac{1}{(x^2+(y-a)^2)^{3/2}}-\frac{1}{(x^2+(y+a)^2)^{3/2}}\right]-aq\left[\frac{1}{(x^2+(y-a)^2)^{3/2}}+\frac{1}{(x^2+(y+a)^2)^{3/2}}\right]
\end{aligned}$$

Entwicklung der Wurzel ($x^2 + y^2 \gg a^2$):

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2+(y\pm a)^2)^{3/2}} &\approx \frac{1}{(x^2+y^2\pm 2ay)^{3/2}} = \frac{1}{r^3}\frac{1}{\left(1\pm\frac{2ay}{r^2}\right)^{3/2}} \\ &\approx \frac{1}{r^3}\left[1 \mp \frac{3ay}{r^2} + \dots\right] \text{ mit } r^2 = x^2+y^2\end{aligned}$$

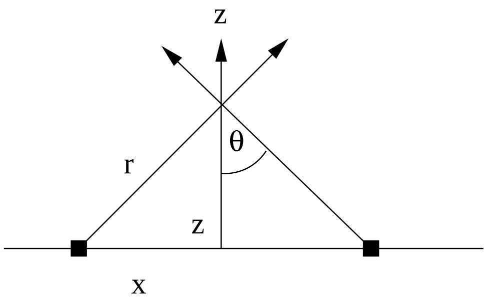
Einsetzen mit $p = 2aq$:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \tfrac{3pxy}{(x^2+y^2)^{5/2}} \\ E_y &= \tfrac{p(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}} \end{aligned}\right\} \to \frac{1}{r^3} \text{ für } r \to \infty$$

Ebenso: Berechne Potential $\varphi(r)$, einfach da Skalar! Dann berechne $\vec{E} = -\nabla\varphi$.

4

Wähle zwei symmetrische Ladungselemente $dq = \rho_0 dx$, so dass für Betrag des Feldes in der z-Richtung (einzige Komponente) $dE = 2\frac{dq}{r^2}\cos\theta$.



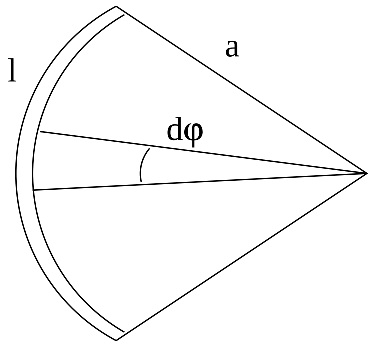
Habe $\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}$ und $r^2 = x^2 + z^2$ und Gesamtfeld

$$E = \int_0^{l/2} dE = 2\rho_0 \int_0^{l/2} \frac{z}{(x^2+z^2)^{3/2}} dx = 2\rho_0 \frac{x}{z}\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}\bigg|_0^{l/2}.$$

Einsetzen der Grenzen und $\rho_0 l = q$ ergibt: $E = \frac{2q}{z\sqrt{4z^2+l^2}}$. Unendlich langer Leiter ($l \to \infty$): $E = \frac{2\rho_0}{z}$, Punktladung ($l = 0$): $E = \frac{q}{z^2}$.

5

Ansatz wie in Aufgabe 4: $dE = 2\frac{dq}{r^2}\cos\theta$. Benutze jedoch $dq = \rho_0 a d\theta$.



Integrationsgrenzen: a und $\varphi/2$

$$E = \frac{2\rho_0}{a} \int_0^{\varphi/2} \cos\theta d\theta = \frac{2\rho_0}{a} \sin\frac{\varphi}{2} \ .$$

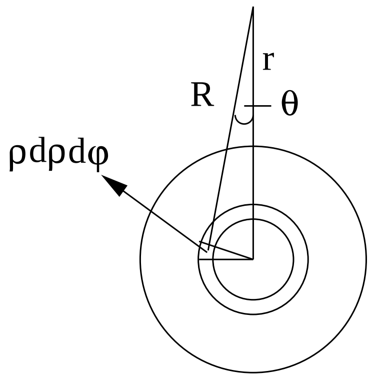
Gesamtladung: $q = \rho_0 l = \rho_0 a \varphi$
Feld: $E = \frac{2q}{a^2} \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}$ (φ im Bogenmaß)
Punktladung ($\varphi = 0$):

$$E = \frac{2q}{a^2} \lim_{\varphi\to 0} \frac{1}{2} \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} = \frac{q}{a^2} \lim_{\varphi\to 0} \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} = \frac{q}{a^2}$$

(oder $\sin\frac{\varphi}{2}$ nach Taylor entwickeln)

6

Die Komponenten des Feldes senkrecht zur Achse sind nach der Winkelintegration Null. Betrachte nur Komponenten entlang der Achse.



Für jedes Flächenelement mit Ladung $dq = \sigma\rho d\rho d\varphi$: Beitrag $dE = \frac{dq}{R^2}\cos\theta$. Da $\cos\theta = \frac{r}{\sqrt{\rho^2+r^2}}$, $R^2 = \rho^2 + r^2$, erhalten wir für das Gesamtfeld

$$E = \sigma r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \frac{\rho}{(\rho^2+r^2)^{3/2}} = 2\pi\sigma r \left[-\frac{1}{(\rho^2+r^2)^{1/2}} \right]_0^a = 2\pi\sigma r \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}} \right] \ .$$

Gesamtladung $Q = \pi\sigma a^2$:

$$E = \frac{2Q}{a^2}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\right] .$$

$a = 0$, Punktladung:

$$E = 2Q \lim_{a\to 0} \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\right] = \frac{Q}{r^2}$$

$a = \infty$, ebene Ladungsverteilung: $E = 2\pi\sigma$ (konstantes Feld)

7

Verwende Gauß'sches Gesetz: Gaußkugel mit Radius r, die eine Ladung $q(r)$ einschließt:

$$\oiint_{\text{Kugeloberfläche}} \vec{E} d\vec{f} = E 4\pi r^2 = 4\pi q(r) \;\rightarrow\; \vec{E} = \frac{q(r)}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

mit

$$q(r) = \iiint_{\text{Kugel}} \rho(r') d^3 r' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{r} \rho(r') r'^2 dr' = 4\pi \int_0^{r} \rho(r') r'^2 dr'$$

a) $\rho(r') = A \cdot r'$
Feld im Inneren der Kugel (Radius der Gaußfläche $r < R$):

$$\begin{aligned} q(r) &= 4\pi A \int_0^r r'^3 dr' = \pi A r^4 \\ \vec{E} &= \pi A r^2 \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

Feld außerhalb der Kugel ($r > R$):

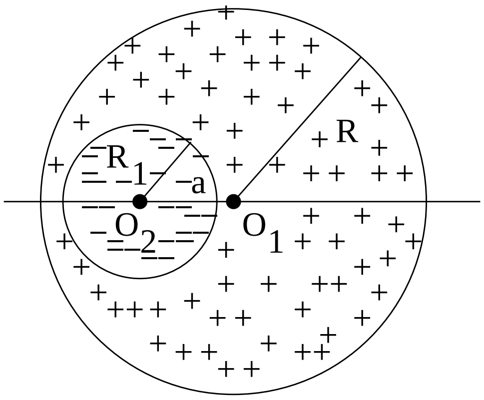
$$\begin{aligned} q(r) &= 4\pi A \int_0^R r'^3 dr' = \pi A R^4 \\ \vec{E} &= \pi A \frac{R^4}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

b) $\rho(r') = \frac{A}{r'}$
analog zu Aufgabenteil a)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= 2\pi A \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{innen} \\ \vec{E} &= 2\pi A \frac{R^2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{außen} \end{aligned}$$

8

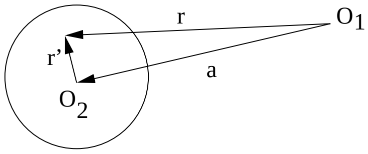
Den ladungsfreien Hohlraum stellt man sich als Überlagerung einer positiv (ρ_+) und einer gleich stark negativ ($\rho_- = -\rho$) geladenen Kugel vor.



Das gesuchte Feld ist damit eine Überlagerung der beiden Modellfelder

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \ .$$

Nach dem Gauß'schen Gesetz erhält man für das Feld innerhalb einer homogen geladenen Kugel am Ort $\vec{r}$



$$\oiint \vec{E}_r d\vec{f} = 4\pi\rho_+ \frac{4}{3}\pi r^3 = E \cdot 4\pi r^2 \ \rightarrow \ \vec{E}_+ = \frac{4}{3}\pi r \frac{\vec{r}}{r}\rho_+ = \frac{4}{3}\pi \vec{r}\rho_+ \ .$$

Entsprechend erhält man für das Modellfeld der negativen Ladungsverteilung

$$\vec{E}_- = \frac{4}{3}\pi r' \rho_- = -\frac{4}{3}\pi \vec{r}' \rho_+ \ .$$

Daraus ergibt sich

$$\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho_+(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{4}{3}\pi\vec{a}\rho_+ \ .$$

9

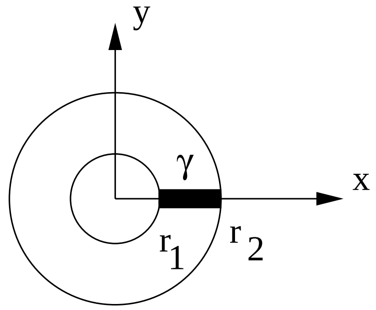
Zur Ausnutzung der Symmetrie, benutze als Gaußfläche die Oberfläche eines Zylinders der Länge l mit dem Radius $r_1 < r < r_2$ ($\vec{E} := E \cdot \vec{n}$)

$$4\pi Q = \oiint_{\text{Zylinder}} \vec{E} d\vec{f} = E \oiint_{\text{Zylinder}} \vec{n} d\vec{f} = E \cdot 2\pi r l \ \rightarrow \ \vec{E} = \frac{2Q}{rl}\frac{\vec{r}}{r}$$

($\frac{\vec{r}}{r}$ ist der Einheitsvektor senkrecht zur Zylinderachse). Das zugehörige Potential erhält man aus

$$V = \int\limits_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{2Q}{l} \int\limits_\gamma \frac{1}{r^2} \vec{r} d\vec{r}$$

bzw. genauer: man erhält tatsächlich die Potentialdifferenz (Spannung) zwischen Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges γ (Warum?)



Wähle den Integrationsweg entsprechend der Abbildung zwischen den Punkten $P_1 = (r_1, 0, 0)$ und $P_2 = (r_2, 0, 0)$ entlang der x-Achse:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2Q}{l} \int\limits_\gamma \frac{1}{r^2} \vec{r} d\vec{r} = \frac{2Q}{l} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{r^2} x dx + \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{r^2} y dy + \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{r^2} z dz \right\} \\ &= \frac{2Q}{l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{x}{\sqrt{x^4}} dx = \frac{2Q}{l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{x} dx = \frac{2Q}{l} \ln \frac{r_1}{r_2} \ . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Kapazität

$$C = \frac{l}{2 \ln \frac{r_1}{r_2}} \ .$$

10

Integrale Form des Gauß'schen Gesetzes:

$$\iint \vec{E}\, d\vec{f} = E\, 4\pi r^2 = 4\pi q(r) \rightarrow \vec{E} = \frac{q(r)}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

mit

$$\begin{aligned} q(r) = \iiint \rho(r')\, d^3r' &= \int_0^\pi d\phi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta \int_0^r \rho(r') r'^{\,2} dr' \\ &= 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^{\,2} dr' \end{aligned}$$

In unserem Fall lautet das zu berechnende Integral:

$$q(r) = \iiint \rho(r') d^3r' = -4\pi \frac{e_0}{\pi a^3} \int_0^r e^{-\frac{2r'}{a}} r'^{\,2} dr'$$

Eine Integraltafel oder zweifache partielle Integration liefert

$$q(r) = -\frac{4e_0}{a^3}\left\{-\frac{a}{2}e^{-\frac{2r}{a}}r^2 - \frac{a^2}{2}e^{-\frac{2r}{a}}r - \frac{a^3}{4}e^{-\frac{2r}{a}} + \frac{a^3}{4}\right\} .$$

Das elektrische Feld ist dann

$$\vec{E} = \left\{-\frac{e_0}{r^2}\left[1 - e^{-\frac{2r}{a}}\left(1 + \frac{2r}{a}\right)\right] + \frac{2e_0}{a^2}e^{-\frac{2r}{a}}\right\}\frac{\vec{r}}{r} .$$

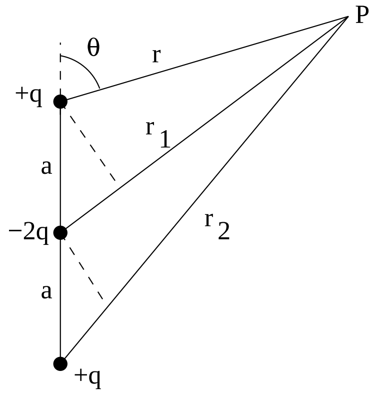
Das elektrostatische Gesamtfeld im Atom

$$\vec{E}_G = \vec{E}_e + \vec{E}_p = \vec{E}_e + \frac{e_0}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} .$$

11

$$V(r,\theta) = q\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = q\frac{r_1 r_2 - 2rr_2 + rr_1}{rr_1r_2}$$

Da angenommen wurde, dass die Entfernung des Feldpunktes vom Dipol viel größer ist als das Ausmaß des Dipols ($r \gg a$) ergibt die Zeichnung



$$\begin{aligned} r_1 &\approx r + a\cos\theta \\ r_2 &\approx r + 2a\cos\theta \end{aligned}$$

Weiterhin gilt in guter Näherung: $r_1 r_2 r \approx r^3$. Es folgt

$$V(r,\theta) \approx 2q\frac{a^2\cos^2\theta}{r^3} .$$

12

Die gesuchte Ladungsverteilung wird aus der Poisson-Gleichung bestimmt. Dazu muss man die Singulariät bei $r = 0$ abspalten, um die notwendigen Ableitungen berechnen zu können.

$$\triangle\phi(r) = q\triangle_r\frac{1}{r} + q\triangle_r\frac{e^{-\alpha r} - 1}{r}$$

Mit

$$\triangle_r = \frac{2}{r}\partial_r + \partial_r^2$$

und

$$\begin{aligned}
\partial_r \frac{e^{-\alpha r} - 1}{r} &= -\alpha \frac{e^{-\alpha r}}{r} - \frac{e^{-\alpha r} - 1}{r^2} \\
\partial_r^2 \frac{e^{-\alpha r} - 1}{r} &= \alpha^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r} + 2\alpha \frac{e^{-\alpha r}}{r^2} + 2 \frac{e^{-\alpha r} - 1}{r^3}
\end{aligned}$$

sowie

$$\triangle_r \frac{1}{r} = -4\pi\delta(r)$$

findet man

$$\triangle\phi(r) = -q4\pi\delta(r) + q\alpha^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r} = -4\pi\rho(r) \ ,$$

so dass

$$\rho(r) = q\delta(r) - q\frac{\alpha^2}{4\pi}\frac{e^{-\alpha r}}{r} \ ,$$

d.h. das Potential wird durch eine Punktladung q und eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung

$$-q \int d^3r \frac{\alpha^2}{4\pi}\frac{e^{-\alpha r}}{r} = -q$$

erzeugt. Das hier diskutierte "Yukawa-Potential" spielt in der Kernphysik eine gewisse Rolle.