

# Spezielle Relativitätstheorie

Skript zur Vorlesung

JW Goethe – Universität Frankfurt

Hans Jürgen Lüdde  
Thorsten Rühl

Institut für Theoretische Physik  
der J.W. Goethe – Universität

Max-von-Laue-Straße 1  
60438 Frankfurt am Main

e-mail: [luedde@th.physik.uni-frankfurt.de](mailto:luedde@th.physik.uni-frankfurt.de)



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung in die spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>1</b>
1.1	Achtung: Höchstgeschwindigkeit im Universum . . . . .	2
1.1.1	Das Experiment von Michelson und Morley und der Äther . . . . .	2
1.1.2	Die Höchstgeschwindigkeit und Isotropie der Lichtausbreitung im Vakuum – Aberration von Fixsternen . . . . .	5
1.1.3	Messung der Lichtgeschwindigkeit . . . . .	6
1.2	Die Einstein'schen Postulate . . . . .	7
1.3	Der Minkovski Raum . . . . .	9
1.3.1	Eigenschaften des Minkovski Raumes . . . . .	10
1.3.2	Vektoren im Minkovski Raum – Vierervektoren . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Kovariante Formulierung der klassischen Physik</b>	<b>17</b>
2.1	Kovariante Form der Elektrodynamik . . . . .	17
2.2	Relativistische Mechanik . . . . .	19



# Kapitel 1

## Einführung in die spezielle Relativitätstheorie

In der klassischen Mechanik geht man davon aus, dass Inertialsysteme gleichwertig sind zur Beschreibung physikalischer Vorgänge. D.h. es gibt keine experimentelle Entscheidungsmöglichkeit, welches von zwei Inertialsystemen sich bewegt oder in Ruhe ist. Man sagt z.B. die klassische Mechanik sei forminvariant gegenüber Galilei Transformation, d.h. die BWGl der klassischen Mechanik sind in jedem Inertialsystem identisch

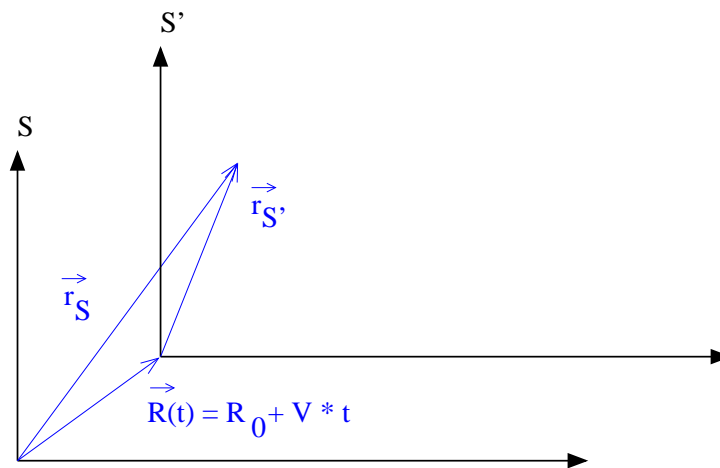


Abb. 1.1: Geometrie zur Galilei Transformation

$$\begin{aligned} \text{Galilei Transformation:} & \quad \vec{r}_{s'} = \vec{r}_s - \vec{R}(t) \\ \text{Transformation der Geschwindigkeit:} & \quad \vec{r}'_{s'} = \vec{r}'_s - \vec{V} \\ \text{BWGl ist invariant:} & \quad \vec{r}'_{s'} = \vec{r}'_s \end{aligned}$$

Die Invarianz der klassischen Mechanik gegenüber Galilei Transformationen führt aber zu Problemen bei hohen Relativgeschwindigkeiten  $\vec{V}$  zwischen den Inertialsystemen:

1. erlaubt sie eine Signalausbreitung mit Überlichtgeschwindigkeit und
2. wäre die Signalausbreitung einer bewegten Quelle nicht mehr isotrop, also nicht unabhängig von der Raumrichtung.

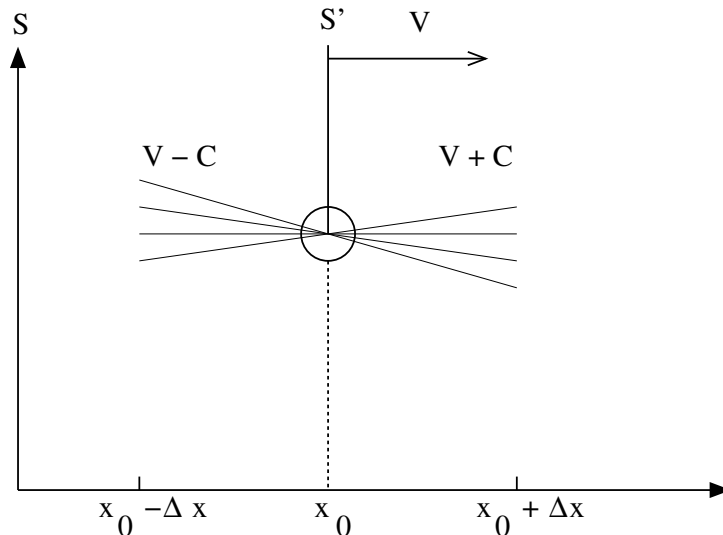


Abb. 1.2: Anisotropie der Lichtgeschwindigkeit als Vorhersage der Galilei Transformation

Betrachte eine Lichtquelle, die sich relativ zum Beobachter mit der Geschwindigkeit  $\vec{V}$  bewegt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes ist wegen der Galilei Invarianz  $V+c$  in Bewegungsrichtung und  $V-c$  entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung. D.h. von  $S$  aus gesehen erscheint das Signal an der Position  $x_0 + \Delta x$  eher als bei  $x_0 - \Delta x$ . Der Beobachter in  $S$  sieht somit ein nicht isotropes Signal während ein mitbewegter Beobachter in  $S'$  behauptet, das Licht breitet sich in alle Raumrichtungen gleich schnell aus. Offenbar führt die Galilei Invarianz der klassischen Mechanik bei großen Relativgeschwindigkeiten zu widersprüchlichen Aussagen.

## 1.1 Achtung: Höchstgeschwindigkeit im Universum

### 1.1.1 Das Experiment von Michelson und Morley und der Äther

Das ausgehende 19. Jahrhundert wurde noch deutlich durch die Erfahrungen der klassischen Mechanik bestimmt. Danach hatte man eine genaue Vorstellung von mechanischen Wellen und ihren typischen Vertretern Wasserwellen und Schallwellen. Mechanische Wellen benötigen ein Trägermedium (Luft, Wasser, feste Körper) zur Ausbreitung und so war es nicht verwunderlich, dass man auch ein Trägermedium für elektromagnetische Wellen postulierte – den Äther. Der Äther hatte noch eine weitere Funktion: Die klassische Mechanik befasst sich mit Kräften und deren Auswirkung auf die Bewegung von Massen. Sie erklärt aber nicht, wie diese Kräfte zwischen zwei Massen übertragen werden. Wenn man mit einem Seil an einer Masse zieht, so ist die Kraftübertragung

scheinbar offensichtlich. Wo ist aber der materielle Bezug zwischen Erde und Mond und wie findet die Kraftübertragung statt? Ist jedoch das ganze Universum mit dem (nicht näher bekannten) materiellen Äther durchsetzt, so kann jede Fernwechselwirkung über die Eigenschaften des Äthers erklärt werden. Nun ist aus philosophischen Überlegungen sofort einsichtig, dass der Äther eine universelle Eigenschaft des Universums sein muss, denn aus dem Relativitätsprinzip folgerte schon Newton, dass die Physik im gesamten Weltraum gleichwertig sein sollte.

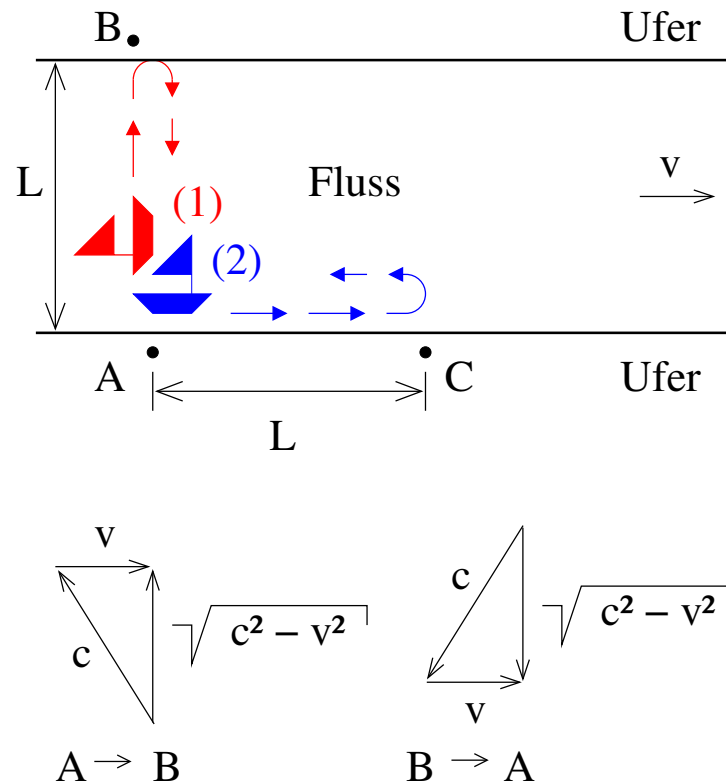


Abb. 1.3: Veranschaulichung des Experimentes von Michelson und Morley: Boot (1) bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $c$  so gegen die Flussrichtung, dass es direkt von A nach B und zurück kommt. Die effektive Geschwindigkeit ist  $\sqrt{c^2 - v^2}$ . Boot (2) bewegt sich von A nach C mit  $c + v$  und von C nach A mit  $c - v$ . Beide Boote legen somit die selbe Strecke  $2L$  zurück. Boot (1) erreicht A nach der Zeit  $t_1$ , Boot (2) nach der Zeit  $t_2$ .

D. h. der Äther – wenn er denn existiert – stellt ein absolutes Bezugssystem dar und die Erde bewegt sich relativ zum Äther mit der Geschwindigkeit  $-\vec{v}$ . Von der Erde aus gesehen bewegt sich der Äther mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  (wie der Fluss relativ zum Ufersystem ABC). Schickt man nun einen Lichtstrahl  $\perp$  zu  $\vec{v}$  und einen  $\parallel$  zu  $\vec{v}$ , so wird sich bei gleicher Wegstrecke ein Laufzeitunterschied

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

ergeben, weil sich das Licht ja bezogen auf das Trägermedium Äther mit  $c$  ausbreitet.

$$\begin{aligned}
 t_1 &= t_{A \rightarrow B} + t_{B \rightarrow A} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\
 &= \frac{2L}{c} (1 - \beta^2)^{-1/2} \\
 &= \frac{2L}{c} \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots \right) \\
 t_2 &= \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c} (1 - \beta^2)^{-1} \\
 &= \frac{2L}{c} (1 + \beta^2 + \dots) \\
 \Delta t &\cong \frac{2L}{c} (1 + \beta^2) - \frac{2L}{c} \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \right) \approx \frac{L}{c} \cdot \beta^2 \\
 \text{mit } \beta^2 &= \frac{v^2}{c^2}
 \end{aligned}$$

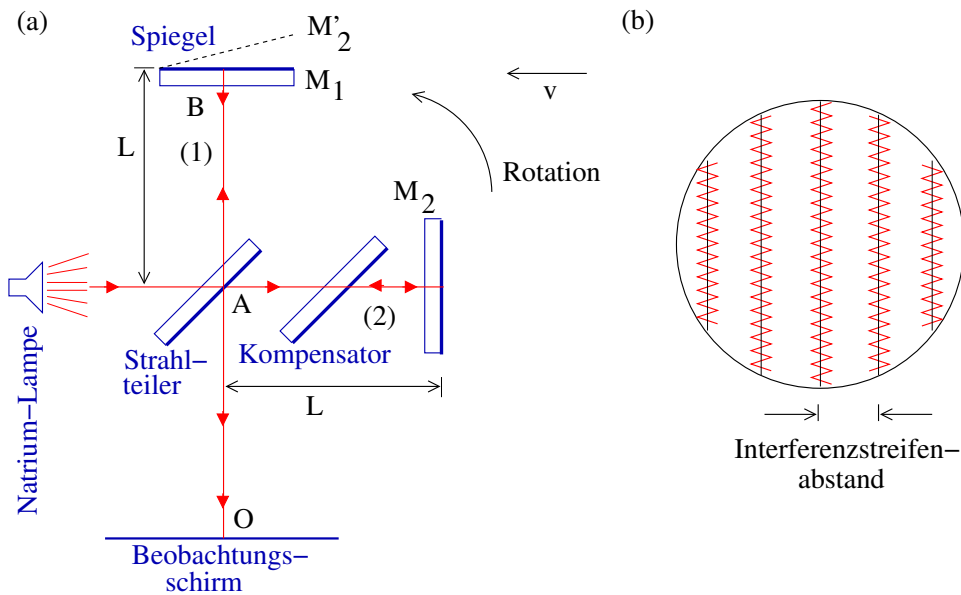


Abb. 1.4: Michelson Interferometer: eine Glasplatte (Kompensator) kompensiert auf dem Weg AC die reduzierte Geschwindigkeit beim Durchgang durch den halbdurchlässigen Spiegel bei A auf dem Lichtweg AB.

Durch diesen Laufzeitunterschied verschiebt sich die Phase des Strahls AB gegenüber AC, so dass es zur Interferenz kommen muss. Dreht man die gesamte Anordnung, ändert sich der Laufzeitunterschied. Als Konsequenz müsste das Interferenzmuster sich stetig verändern.

Michelson und Morley haben in ihrem Experiment (1887) keine Veränderung des Interferenzmusters beobachtet mit dem Ergebnis: **es gibt keinen Äther**. Licht breitet sich ohne Trägermedium aus.



### 1.1.2 Die Höchstgeschwindigkeit und Isotropie der Lichtausbreitung im Vakuum – Aberration von Fixsternen

Um zu zeigen, dass die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum universell, also nicht abhängig vom Inertialsystem ist, benötigt man ein Experiment, in dem sich Sender und Empfänger relativ zueinander bewegen.

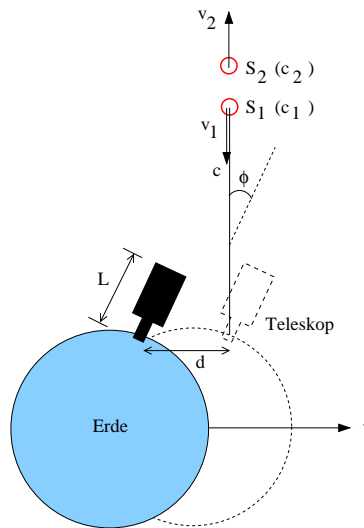


Abb. 1.5: Relativistische Aberration von Fixsternen

Dazu betrachte zwei Sterne  $S_1$  und  $S_2$ , die sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  relativ zur Sonne bewegen. Da die Sterne weit von uns entfernt sind, nehmen wir ihre wahre Bewegung innerhalb einer menschlichen Lebensspanne nicht wahr ( $\rightarrow$  Fixsterne). Durch die Bewegung der Erde ergibt sich nun folgende Situation: Das Licht von  $S_1$  bewegt sich mit der Geschwindigkeit (bei Galilei Transformation zwischen  $S_1$  und Sonne)  $c_1 = c + v_1$  geradlinig zur Erde und trifft auf das Objektiv eines Fernrohrs auf. Während das Licht die Länge  $L$  des Fernrohr in der Zeit

$$t = \frac{L \cos \phi}{c_1}$$

zurücklegt, bewegt sich die Erde um den Abstand  $d = vt$  weiter.

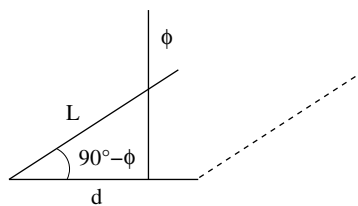


Abb. 1.6:  $\frac{d}{L} = \cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$

$$\begin{aligned} \leadsto d = vt &= v \frac{L \cos \phi_1}{c_1} \\ \leadsto \frac{v}{c_1} &= \frac{d}{L} \cdot \frac{1}{\cos \phi_1} = \frac{\sin \phi_1}{\cos \phi_1} \\ \Rightarrow \phi_1 &= \arctan \frac{v}{c_1} = 20''.5 \quad (\text{scheinbare Verschiebung (Aberration) des Sternorts}) \end{aligned}$$

Ein halbes Jahr später bewegt sich die Erde mit der Geschwindigkeit  $-v$  relativ zum Lichtstrahl, so dass die Sternkoordinaten um  $-20''.5$  korrigiert werden müssen. Über den Jahresverlauf ergibt sich somit eine Positionsveränderung von  $S_1$  um 41 Bogensekunden (relativistische Aberration). Wir sehen nun, dass

die relativistische Aberration für alle 'Fixsterne' identisch ist, unabhängig davon, mit welcher Relativgeschwindigkeit sie sich gegenüber unserem Sonnensystem bewegen, d.h.

$$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = c$$

es existiert eine universelle Lichtgeschwindigkeit  $c$  im Vakuum unabhängig von der Relativbewegung zwischen Sender und Empfänger. Sie ist in allen Raumrichtungen gleich (isotrop).

### 1.1.3 Messung der Lichtgeschwindigkeit

Stellvertretend für eine Reihe von Experimenten: das Experiment von Fizeau zur Messung der Lichtgeschwindigkeit (1849).

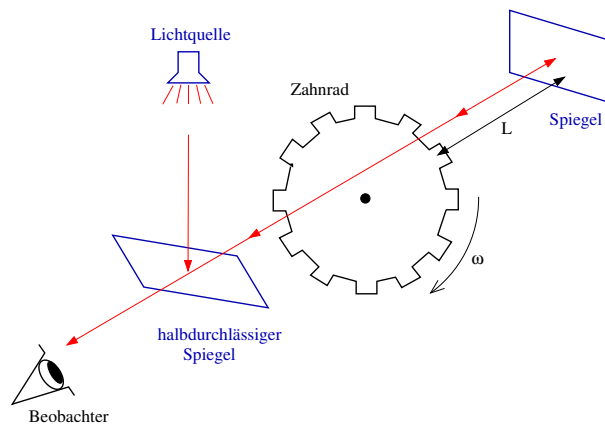


Abb. 1.7: Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau

Ein rotierendes Zahnrad zerlegt den Lichtstrahl in ein gepulstes Signal. Entlang der Strecke  $2L$  zwischen Zahnrad und Spiegel benötigt das Licht die Zeit

$$t = \frac{2L}{c}$$

Sekunden. In dieser Zeit hat sich das Zahnrad um den Winkel  $\alpha = \omega \cdot t$  weiterbewegt. Ist  $\alpha$  gerade so groß, dass das rücklaufende Licht wieder auf eine Lücke trifft, kann das reflektierte Signal beobachtet werden. Sei  $n$  die Zahl der Zähne, so beträgt der Winkel

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}$$

und man erhält ( $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  Drehfrequenz)

$$\frac{2\pi}{n} = \omega t = \omega \frac{2L}{c} \Rightarrow c = \frac{\omega}{2\pi} 2Ln = 2\nu Ln$$

## 1.2 Die Einstein'schen Postulate

Aus der experimentellen Erkenntnis, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes (im Vakuum) unabhängig von der Relativbewegung der Lichtquelle in alle Raumrichtungen gleich  $c$  ist, folgt die Tatsache, dass die Galilei Transformation als Verbindung zweier Inertialsysteme nicht mehr gültig sein kann. D. h. wir benötigen eine Erweiterung des Relativitätsprinzips (dieses von Einstein postulierte Relativitätsprinzip setzt im Grunde nur den Glauben an die Gültigkeit der Maxwell Gleichungen voraus: sie erfordern die Invarianz der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit gegenüber einer Transformation zwischen Inertialsystemen):

- alle Inertialsysteme sind gleichwertig zur Beschreibung physikalischer Vorgänge
- die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist in allen Inertialsystemen gleich

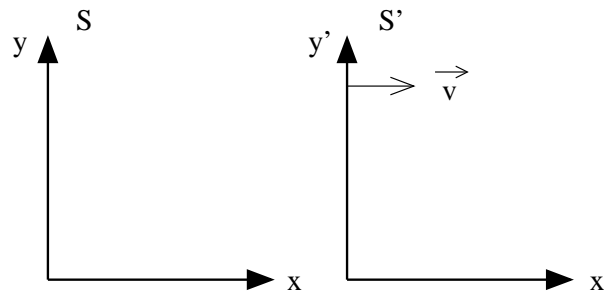


Abb. 1.8:  $S'$  bewegt sich relativ zu  $S$  mit der Geschwindigkeit  $v$

Wir suchen die Transformation zwischen  $S$  und  $S'$ , die das erweiterte Relativitätsprinzip erfüllt und für kleine Relativgeschwindigkeiten  $v$  in die Galilei Transformation, die der Umwelterfahrung im Rahmen der klassischen Mechanik genügt, übergeht.

1. Die erste Bedingung des Relativitätsprinzips erfordert, dass die Transformation zwischen  $S$  und  $S'$  linear sein muss, d.h. für  $\vec{v} = (v, 0, 0)$  erhalten wir den Ansatz

$$x' = Ax + Bt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = Cx + Dt$$

- I. a. darf man  $t$  nicht mehr als Invariante der Transformation betrachten.

2. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes ist in beiden Systemen  $\underline{c}$  und isotrop, d.h. auf einer beliebigen Kugelschale mit der Lichtquelle im Zentrum muss gelten

$$\begin{aligned} S : \quad x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \\ S' : \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \\ \Rightarrow \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \end{aligned}$$

Setzt man für  $x', y', z', t'$  ein, so erhält man Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten  $A - D$ .

- (i) Der Ursprung von  $S'(x' = 0)$  in  $S(x = vt)$  ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= Avt + Bt \\ B &= -Av . \end{aligned}$$

- (ii) Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erfordert

$$\begin{aligned} (Ax + Bt)^2 - c^2(Cx + Dt)^2 &= x^2 - c^2 t^2 \\ 0 &= x^2(A^2 - c^2 C^2 - 1) + 2xt(AB - c^2 CD) + t^2(B^2 - c^2 D^2 + c^2) . \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck muss für beliebige Orte und Zeiten gelten, so dass man die weiteren drei Bestimmungsgleichungen erhält

$$\begin{aligned} A^2 - c^2 C^2 - 1 &= 0 \\ AB - c^2 CD &= 0 \\ B^2 - c^2 D^2 + c^2 &= 0 . \end{aligned}$$

Die resultierende Lorentztransformation lautet somit

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(-\frac{\beta}{c}x + t\right)$$

mit

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Bemerkungen:

1. Die Vorstellung einer absoluten Zeit ist unter Lorentztransformation nicht mehr gültig.
2.  $\beta \ll 1 : x' \approx x - vt, \quad t' \approx t \Leftrightarrow$  bei kleinen Relativgeschwindigkeiten geht die L.T. in die G.T. über
3.  $\beta > 1 \Rightarrow \gamma \in \mathbb{C} :$  wird  $\gamma$  imaginär (für  $\beta > 1$ ) verliert die L.T. ihren Sinn, denn Ort und Zeit sind Observablen d. h. Messgrößen und müssen somit reellwertig sein. Daraus kann man ableiten, dass kein messbares Objekt sich mit einer Geschwindigkeit  $v > c$  bewegen darf.

Es ist nun interessant zu überprüfen, ob  $c$  tatsächlich eine Grenzgeschwindigkeit darstellt. Dazu müssen wir die Geschwindigkeitstransformation aus der L.T. ableiten. Man erhält sie aus der L.T. für die Differentiale

$$dx' = \gamma(dx - v dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \gamma\left(-\frac{\beta}{c} dx + dt\right)$$

durch Bildung der jeweiligen Differentialquotienten

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt'} &\equiv \dot{x}' = \frac{\dot{x} - v}{1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}} \\ \frac{dy'}{dt'} &\equiv \dot{y}' = \frac{\dot{y}(1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}} \\ \frac{dz'}{dt'} &\equiv \dot{z}' = \frac{\dot{z}(1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}} \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeitstransformation zeigt für das Beispiel in der Einleitung

$$\vec{r} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\pm c, 0, 0) ,$$

die Ausbreitung einer em-Welle in  $S$  parallel bzw. antiparallel zur x-Achse

$$\vec{r}' = (\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}') = (\pm c, 0, 0)$$

dass die Lichtgeschwindigkeit im zu  $S$  bewegten System  $S'$  (1) nicht überschritten wird und (2) isotrop ist.

## 1.3 Der Minkovski Raum

Als Konsequenz dessen, dass für relativistische Inertialsysteme die Zeit keine Invariante ist, definiert man einen vierdimensionalen Raum – den Minkovski Raum – in dem die Zeit ( $c \cdot t$ ) als gleichberechtigte Koordinate behandelt wird. Ein beliebiger Vektor in diesem Raum kann bezüglich der 4 Raum-Zeit-Richtungen in Komponenten zerlegt werden.

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^4 x_i \vec{e}_i$$

Allerdings ist der Vektorraum nicht euklidisch. Das folgt aus der Identifikation der 4. Komponente mit  $x_4 = ct$  und der Definition der Länge eines Vektors im Minkovski Raum

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2$$

Um diese Längendefinition durchzusetzen, muss man eine Metrik einführen

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und entsprechend das Skalarprodukt für einen nicht euklidischen Raum definieren

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{ij=1}^4 a_i g_{ij} b_j = \vec{a}^T \vec{g} \vec{b}$$

Die im vorigen Kapitel abgeleitete spezielle L.T. nimmt nun die Form an

$$\vec{x}' = \vec{L} \cdot \vec{x}$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Man überprüft sofort, dass  $\det \vec{L} = 1$ ,  $\vec{L}$  also eine orthogonale Transformation im Minkowski Raum darstellt. Orthogonale Transformationen mit Determinante 1 beschreiben i.a. Drehungen.

### 1.3.1 Eigenschaften des Minkowski Raumes

Im Minkowski Raum wird jedes Ereignis an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit durch einen Punkt dargestellt.

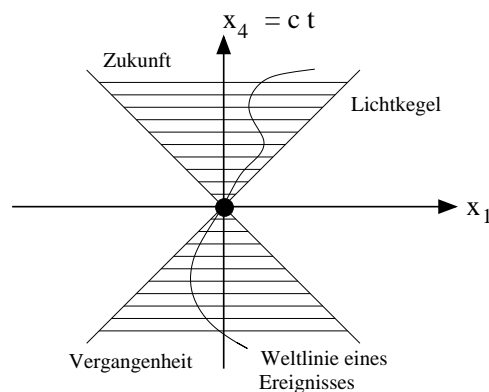


Abb. 1.9: Minkowski Raum

Ein Ereignis zur Zeit  $t = 0$  (Punkt) besitzt eine Vergangenheit und eine Zukunft: im Minkowski Raum wird dies durch eine Weltlinie (zeitartige Verknüpfung) dargestellt.

Weltlinien können nur innerhalb des schraffierten Lichtkegels existieren, da sich alle messbaren Objekte mit  $v < c$  ausbreiten müssen. Der Lichtkegel ist definiert durch einen Lichtstrahl, der sich mit  $\pm c$  entlang der  $x$ -Achse ausbreitet ( $x = \pm ct$ ). Alle Punkte des Minkovski Raumes innerhalb des Lichtkegels heißen zeitartig (Weltlinien), alle anderen Punkte heißen raumartig: man benötigt räumliche Verschiebung, um in diesen Bereich des Minkovski Raumes zu kommen.

Wir haben gesehen, dass die L.T. eine Drehung im Minkovski Raum beschreiben soll und wollen uns diese Drehung graphisch veranschaulichen. Die  $x'$  Achse wird durch die Bedingung

$$ct' = 0$$

bestimmt. Damit folgt aus der L.T. (siehe Seite 7)

$$ct' = 0 = c\gamma \left( -\frac{\beta}{c} x + t \right) \Rightarrow ct = \beta x \quad (x'\text{-Achse})$$

die Gleichung für die  $x'$ -Achse. Analog erhält man als Gleichung für die  $ct$ -Achse

$$x' = 0 = \gamma(x - vt) \Rightarrow ct = \frac{1}{\beta} x \quad (ct'\text{-Achse})$$

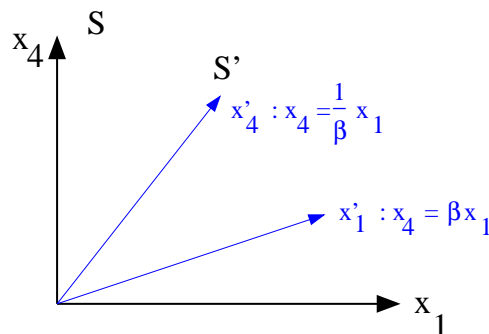


Abb. 1.10: Die L.T. als Drehung im Minkovski Raum

Die beiden Achsen haben zueinander reziproke Steigungen. Das System  $S'$  wird offenbar durch ein schiefwinkliges Koordinatensystem repräsentiert. Für den Fall  $v = c$  fallen die Achsen  $x'_4 = ct'$  und  $x'_1$  mit der Lichtlinie zusammen.

Zwei wichtige Effekte der speziellen Relativitätstheorie lassen sich durch die graphische Veranschaulichung der L.T. einfach ableiten:

1. Längenkontraktion:

Ein Objekt der Länge  $l'$  bewege sich mit großer Geschwindigkeit. In  $S'$  entspricht dies einem Segment der  $x'_1$ -Achse, da man eine Länge nur bestimmen kann, wenn man gleichzeitig Anfangs- und Endpunkt sieht. Von  $S$  aus betrachtet erscheint das Objekt verkürzt: man findet

$$l = \frac{1}{\gamma} l'$$

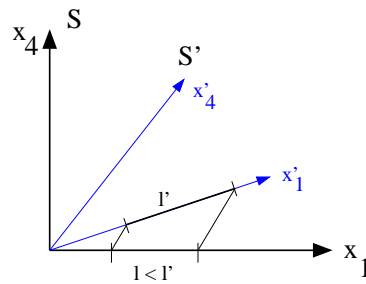


Abb. 1.11: Zur Lorentzkontraktion

## 2. Zeitdilatation:

Einen ähnlichen Effekt findet man für Zeitintervalle. Ein Zeitintervall der Dauer  $\Delta t$  in  $S$  an einem festen Ort erscheint aus der Sicht von  $S'$  verzögert

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

d. h. "bewegte Uhren gehen langsamer"

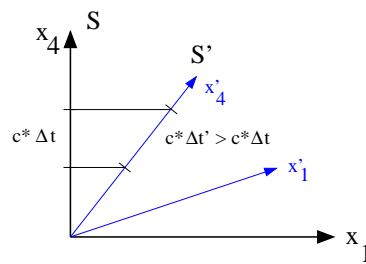


Abb. 1.12: Zur Zeitdilatation

## 3. Eigenzeit und Zwillingsparadoxon:

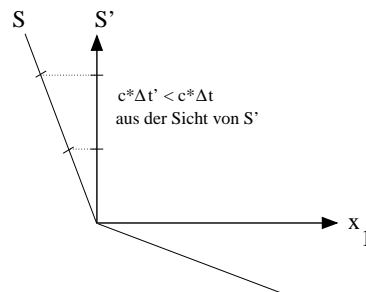


Abb. 1.13: Zum Zwillingsparadoxon

Andererseits würde ein Beobachter in  $S'$  das genaue Gegenteil behaupten: Seine Uhr ginge ganz normal, nur die Uhr im System  $S$ , das sich mit  $-v$  relativ zu  $S'$



bewegt, ginge langsamer (Zwillingsparadoxon). Somit muss sich jeder Beobachter bezogen auf sein System eine universelle Zeit  $d\tau$  (Eigenzeit) definieren, die dann invariant gegenüber L.T. ist, d. h.

$$\begin{aligned} dt &\equiv d\tau = d\tau' = dt' \cdot k \\ \rightsquigarrow k &= \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \hookrightarrow d\tau' = dt' \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

Solche Invarianten unter L.T. spielen eine besondere Rolle in der speziellen Relativitätstheorie, wie wir gleich sehen werden.

### 1.3.2 Vektoren im Minkovski Raum – Vierervektoren

Betrachten wir nun das Verhalten eines Skalarproduktes zweier Minkovskivektoren (4 Vektoren) unter einer L.T.. Es gilt

$$\begin{aligned} (\vec{a}', \vec{b}') &= \left( \vec{L} \vec{a}, \vec{L} \vec{b} \right) = \left( \vec{L} \vec{a} \right)^T \vec{g} \left( \vec{L} \vec{b} \right) \\ &= \vec{a}^T \vec{L}^T \vec{g} \vec{L} \vec{b} = \vec{a}^T \vec{g} \vec{a} = (\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

mit

$$\vec{L}^T \vec{g} \vec{L} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \vec{g}$$

D. h. das Skalarprodukt zweier 4 Vektoren ist invariant gegenüber L.T., ein Ereignis, das plausibel ist, da Skalarprodukte invariant gegenüber Drehungen sind. Somit steht nun das Konzept fest, das wir verfolgen müssen, um eine kovarianten Formulierung (forminvariant unter L.T.) z.B. der Elektrodynamik zu gewinnen:

1. wir müssen aus den die E-Dynamik bestimmenden Größen 4 Vektoren bilden und
2. die Grundgleichungen in Form von Skalarprodukten formulieren

4 Vektoren sind Vektoren, die sich unter L.T. transformieren. Wir haben sie bisher in kontravarianter Form geschrieben

$$\vec{a} = \vec{a}^j = (a^1, a^2, a^3, a^4)$$

Man könnte auch die Metrik des Raumes direkt in die Komponentenzerlegung der 4 Vektoren aufnehmen. Dann spricht man von einer kovarianten Zerlegung

$$a_j = \sum_{k=1}^4 g_{jk} a^k \hookrightarrow$$

$$\vec{a}_j = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4) = (a^1 \ a^2 \ a^3 \ -a^4)$$

Graphisch lassen sich die beiden Komponentenerlegungen wie folgt deuten: In einem schiefwinkligen Koordinatensystem gibt es zwei Möglichkeiten, einen Vektor  $\vec{a}$  zu beschreiben:

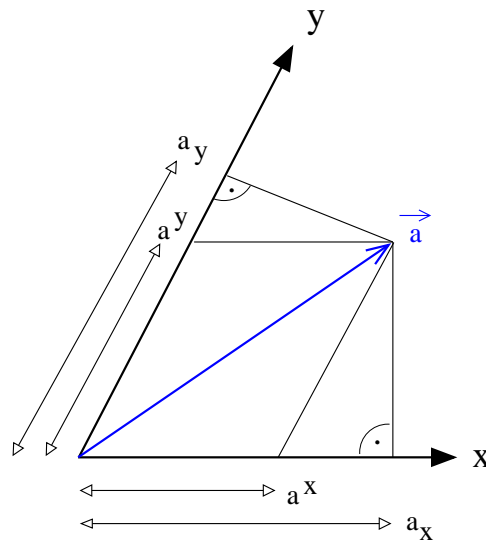


Abb. 1.14: Darstellung von ko- und kontravarianten Komponenten eines Vektors in einem schiefwinkligen Koordinatensystem.

1. die Komponentenerlegung entsprechend einer Parallelprojektion ( $a^x a^y$ ): die kontravarianten Komponenten des Vektors

$$\vec{a} = a^x \vec{e}_x + a^y \vec{e}_y$$

2. die Komponentenerlegung entsprechend der Projektion des Vektors auf die Achsen ( $a_x a_y$ ) sind die kovarianten Komponenten des Vektors  $\vec{a}$

Mit der Definition von ko- und kontravarianter Darstellung lässt sich das Skalarprodukt in einer einfachen Form schreiben

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}^j \cdot \vec{b}_j = \sum_{j=1}^4 a^j b_j$$

Beispiele für 4 Vektoren sind neben dem Ereignisvektor

$$(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4) = (x \ y \ z \ -ct)$$

der 4 Gradient

$$\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j} = \left( \nabla, \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

Ableitung nach kontravarianten Komponenten

$$\partial^j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} = \left( \nabla, -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

Ableitung nach kovarianten Komponenten

Invarianten unter L.T., da Skalarprodukte, sind die 4 Divergenz und der Wellenvektor (Quabla Operator)

$$\partial_j \vec{A}^j = \partial^j \vec{A}_j = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial A_j}{\partial x_j} = \nabla \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_4}{\partial t}$$

$$\square = \partial_j \partial^j = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j,k=1}^4 \frac{\partial}{\partial x^j} g_{jk} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Wir sehen schon an diesem kleinen Exkurs, dass es keine Schwierigkeiten bereitet, die Gleichungen der E-Dynamik kovariant zu formulieren.



# Kapitel 2

## Kovariante Formulierung der klassischen Physik

### 2.1 Kovariante Form der Elektrodynamik

Beginnen wir mit der Kontinuitätsgleichung. Sie lässt sich in einfacher Form kovariant formulieren

$$\nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \nabla \vec{j} + \frac{\partial(c \cdot \rho)}{\partial(c \cdot t)} = 0$$
$$\text{Def.: } \vec{j}^k \equiv (\vec{j}, c\rho) \rightsquigarrow \partial_k \vec{j}^k = 0 = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial j_k}{\partial x_k}$$

Die 4-Stromdichte

$$\vec{j}^k = (\vec{j}, c\rho)$$

enthält somit alle Quellen des em Feldes. Sie ist divergenzfrei im Minkovski Raum. Die Potentialgleichungen im Vakuum können wir ähnlich einfach zusammenfassen, indem wir das 4-Potential

$$\vec{A}^k = (\vec{A}, \phi)$$

definieren

$$\left. \begin{array}{l} \square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \square \phi = -4\pi \rho \end{array} \right\} \rightarrow \square \vec{A}^k = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}^k$$

Zur Erinnerung: die Separation der Wellengleichungen erhielten wir mit Hilfe der Lorentz-  
ziehung

$$\nabla \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \rightarrow \partial_k \vec{A}^k = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0$$

Etwas aufwändiger ist die Umschreibung der Maxwell Gleichungen. Dazu berechnen wir die Feldstärken  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  aus dem 4-Potential ( $A_4 = -A^4 = -\phi$ )

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightsquigarrow E_k = \frac{\partial A_4}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_4} \\ \vec{B} &= \text{rot } \vec{A} \rightsquigarrow B_k = (-)^{k+1} \left( \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right), \quad i < j \neq k\end{aligned}$$

Aus der einheitlichen Form der Gleichungen motiviert, definiert man den Feldtensor

$$F_{kj} = \frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$$

mit der Darstellung

$$\vec{\vec{F}} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Das em Feld ist in kovarianter Schreibweise nicht mehr nach "reinen Feldtypen"  $\vec{E}$  bzw.  $\vec{B}$  zu interpretieren: Es handelt sich vielmehr um ein Feld mit untrennbaren Komponenten, beschrieben durch einen Tensor 2. Stufe. Diese Tatsache haben wir bisher nur verbalisiert, indem wir von "dem elektromagnetischen Feld" gesprochen haben. Für die Feldgleichungen des em Feldes erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}k = 1 - 3 \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ k = 4 \quad \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi \varrho \\ &\rightarrow \sum_{l=1}^4 \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_k \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ &\rightarrow \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{mk}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_m} = 0, \quad klm = 1, \dots, 4 \quad (*)\end{aligned}$$

(\*) von den 64 ( $4^3$ ) homogenen Feldgleichungen sind infolge der Eigenschaften des Feldtensors 60 Gleichungen identisch 0 und somit trivial.

Wir haben damit 8 Maxwell Gleichungen in 8 Feldgleichungen derart zusammengefasst, dass sie forminvariant gegen Lorentztransformation ( $\rightarrow$  kovariant) sind. In dieser Schreibweise erfüllen sie das Relativitätsprinzip: die Feldgleichungen der E-Dynamik sind unabhängig vom gewählten Inertialsystem.

Natürlich hat sich an dem Inhalt der E-Dynamik durch die kovariante Formulierung nichts geändert, denn die E-dynamik ist grundsätzlich Lorentzinvariant im Gegensatz zur Mechanik, die Galileiinvariant ist. Eine kovariante Formulierung der Mechanik unterscheidet sich somit von der Newton'schen Mechanik auch inhaltlich. Deshalb wollen wir einige phänomenologische Konsequenzen der relativistischen Dynamik im Anschluss diskutieren.

## 2.2 Relativistische Mechanik

Ausgangspunkt für die Mechanik ist die Definition der kinematischen Grundgrößen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Daraus kann man mit Hilfe der Newton'schen BWGl verschiedene Bewegungsformen beliebiger Systeme von Massenpunkten ableiten. Die Newton'schen BWGl sind forminvariant unter G.T. und somit für große Relativgeschwindigkeiten nicht mehr gültig.

Um eine kovariante Formulierung der Mechanik zu erhalten, müssen wir zunächst die kinematischen Grundgrößen im Minkovski Raum definieren. Der Ortsvektor eines M.P. wird im Minkovski Raum ersetzt durch den Ereignisvektor

$$\vec{R} = (x^1 \ x^2 \ x^3 \ x^4) = (\vec{r}, ct),$$

der die Weltlinie eines M.P. beschreibt. Die 4-Geschwindigkeiten eines M.P. erhält man als Veränderung des Ereignisvektors bezogen auf die invariante Eigenzeit (siehe Seite 13)

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} d\tau$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{d\tau} = (V^1 \ V^2 \ V^3 \ V^4) = \gamma(\vec{v}, c)$$

Für den 4-Impuls setzt man an

$$\vec{P} = (P^1 \ P^2 \ P^3 \ P^4) = m_0 \vec{V} = m_0 \gamma(\vec{v}, c)$$

Zur Identifikation von  $m_0$  betrachten wir den klassischen Grenzfall

$$\beta \ll 1 \Rightarrow \gamma \approx 1 :$$

Man erhält

$$\vec{P} = (m_0 v, m_0 c)$$

D.h.  $m_0$  entspricht der klassischen Masse eines M.P., die auch dann besteht, wenn der M.P. in Ruhe ist:  $m_0$  wird deshalb auch als Ruhemasse bezeichnet. Im Gegensatz dazu ist

$$m(v) = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

die relativistische Masse eines bewegten M.P.. Man sieht sofort, dass

$$\lim_{v \rightarrow c} m(v) = \infty,$$

in Übereinstimmung mit unserer Aussage, dass kein messbares Objekt mit einer Ruhemasse die Lichtgeschwindigkeit erreichen sollte.

Bevor wir die vierte Komponente des 4-Impulses interpretieren, betrachten wir zunächst die relativistischen BWGl. In Analogie zum klassischen Begriff der Kraft

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m_0 \vec{a}$$

definieren wir die 4-Kraft  $\vec{K}$

$$\begin{aligned} \vec{K} &= (K^1 K^2 K^3 K^4) = \frac{d\vec{P}}{d\tau} \\ &= m_0 \gamma \frac{d}{dt} (\gamma \vec{v}, \gamma c) \end{aligned}$$

Mit ( $\vec{v} = \vec{a}$ )

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} \vec{a} \cdot \vec{v}$$

erhält man für die 4-Kraft

$$\vec{K} = \gamma^2 \left( \frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{F} \cdot \vec{v}) \vec{v} + \vec{F}, \frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{F} \cdot \vec{v}) c \right)$$

Mit dem Zusammenhang zwischen 4-Kraft und ihren räumlichen Komponenten ist nun die relativistische Erweiterung der kononischen BWGl vollständig

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{R}}{d\tau} &= \frac{1}{m_0} \vec{P} \\ \frac{d\vec{P}}{d\tau} &= \vec{K} \end{aligned}$$

Um einen Ausdruck für die Energie zu gewinnen, multipliziert man die 4-Kraft mit der 4-Geschwindigkeit (analog zur klassischen Mechanik) und findet (Achtung Metrik!)

$$\begin{aligned} \vec{K}^k \vec{V}_k &= \frac{d\vec{P}^k}{d\tau} \vec{V}_k = \frac{1}{2} m_0 \frac{d}{d\tau} (\vec{V}^k \vec{V}_k) = 0 \\ \text{mit } \vec{V}^k \vec{V}_k &= \gamma^2 (v^2 - c^2) = -c^2 \rightsquigarrow \frac{d}{d\tau} \vec{V}^k \vec{V}_k = 0 \\ \hookrightarrow \sum_{k=1}^3 K^k V^k - K^4 V^4 &= 0, K^4 V^4 = \frac{dP^4}{d\tau} V^4 = \frac{d}{d\tau} (m_0 \gamma c) \gamma c = \gamma \frac{d}{d\tau} (m_0 \gamma c^2) \\ \hookrightarrow \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^3 K^k V^k &= \frac{d}{d\tau} (m_0 \gamma c^2) \end{aligned}$$

Man findet wegen  $V^k = \frac{dR^k}{d\tau}$

$$d(m_0 \gamma c^2) = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^3 K^k dR^k$$



einen Ausdruck für das Differential der Gesamtenergie

$$\boxed{E = m_0 \gamma c^2 = m(v) c^2}$$

Dies ist das wohl bekannteste Gesetz der speziellen Relativitätstheorie. Für kleine Geschwindigkeiten sieht man (binomische Entwicklung von  $\gamma$ )

$$E = m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right)$$

dass jedes Teilchen mit Ruhemasse eine Ruheenergie  $m_0 c^2$  besitzt, die potentiell aus der Ruhemasse freigesetzt werden kann. Die kinetische Energie eines relativistischen Teilchens ist dann

$$T = E - m_0 c^2 = (m - m_0) c^2$$

Mit Hilfe der Energie können wir jetzt auch die 4. Komponente des 4-Impulses umschreiben

$$\vec{P} = \left( m_0 \gamma \vec{v}, \frac{E}{c} \right) \equiv \left( \vec{p}, \frac{E}{c} \right)$$

Der Betrag des Impulses muss als Skalarprodukt invariant gegen L.T. sein. Sei

$$\vec{P} = \left( \vec{p}, \frac{E}{c} \right)$$

der Impuls in  $S$  und

$$\vec{P} = (0, m_0 c)$$

der Impuls des gleichen M.P. im System  $S'$ , das sich mit dem M.P. bewegt, so muss gelten

$$\begin{aligned} \vec{P}^k \vec{P}_k &= \vec{P}'^k \vec{P}'_k \rightsquigarrow p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \\ \hookrightarrow E &= (p^2 c^2 + m_0^2 c^4)^{1/2} \end{aligned}$$

Diese relativistische Erweiterung der Energie-Impuls-Relation ist von großer Bedeutung.